36. J. XII.122
43.

Ma.
o. 43.

Grundriß

der

reinen Mathematik

mit einer

kurzen Anweisung zum Feldmessen.

Für

Gymnasien, polytechnische und Gewerb-Schulen

von

Andreas Neubig

Doktor der Philosophie und k. b. Lyceal-Professor.

Dritte, vermehrte Auflage.

Mit 6 Tafeln.

Bayreuth 1835.

Im Verlage der Grau'schen Buchhandlung.

Sr. Wohlgeborn

dem

Herrn Regierungs-Assessor und Appellations-Gerichts-Advokaten

Gottlieb Friedrich Ferdinand Keim

zu Baireuth

widmet diese Umarbeitung

aus

Hochachtung, Liebe und Dankbarkeit

der Verfasser.

Vorrede.

Die Anlage und Durchführung dieses Buches ist ganz bedingt durch meine Unterrichtsmethode in der Mathematik. Ich habe es daher sehr bedauert, daß von der zweiten Auflage, in welcher ich diese Methode kurz beschrieben hatte, auch nicht in einer einzigen der kritischen Zeitschriften, die mir zu Gesicht gekommen sind, eine Anzeige geschehen und meine Lehrmethode beurtheilt worden ist. Ich kann jetzt die Versicherung geben, daß sich dieselbe auf's neue auf das trefflichste bewährt und selbst diejenigen Jünglinge, welche anfangs einen Widerwillen und sogar ein Widerstreben gegen die Mathematik gezeigt haben, für sie gewonnen hat. Unbegreiflich ist es mir daher, wie eine Kommission, die zur Prüfung meiner Lehrmethode niedergesetzt wurde, den Ausspruch thun konnte, daß das Lehrbuch zwar streng systematisch und wissenschaftlich ausgearbeitet sei und die Lehrmethode für minder zahlreiche Klassen ihre Vorzüge habe, aber bei vollen Klassen weniger passend sei! Der letzte Ausspruch ist ganz irrig. Denn die Klassen mögen noch so voll sein, so bleiben alle Schüler in

steter und gespannter Aufmerksamkeit, weil an sie unaufhörlich Fragen gerichtet werden und keiner weiß, wer gerade jetzt zur Beantwortung aufgefordert wird.

Das Wesentliche und Eigenthümliche meiner Methode besteht nun darin, daß der Schüler zu immerwährender Selbstthätigkeit angeregt und fortdauernd im Selbstdenken erhalten wird; daß er allmählig die Stärke seiner Denkkraft kennen lernt, ihr Fortschreiten in der Vollkommenheit wahrnimmt, Vertrauen zu sich selbst gewinnt, Freude über seine Fortschritte empfindet und dadurch zu neuen Geistesarbeiten ermuntert und getrieben wird.

Um aber diesen Zweck zu erreichen, verfahre ich so, daß ich selbst nichts erkläre und vordemonstrire, sondern Alles durch die Schüler erklären und demonstriren lasse. Deßhalb sind den Erklärungen des Lehrbuchs z. B. über die verschiedenen Dreiecke, Vierecke und übrigen Figuren keine Zeichnungen beigegeben; sondern die Schüler müssen an der Tafel die Zeichnungen machen und beweisen, daß sie über den Gegenstand zu Hause nachgedacht, kein Wörtchen übersehen oder flüchtig genommen haben; so wie sie umgekehrt bei allen ihren Erklärungen und Beweisen und überhaupt bei allen ihren Reden keine überflüssigen Worte einschieben oder wesentliche weglassen dürfen. So werden sie bei Zeiten gewöhnt, klar, deutlich und bestimmt zu sprechen.

Geht es zu den Lehrsätzen: so wird einer derjenigen Schüler, von welchen ich voraussetze, daß er den

Satz begriffen haben wird, an die Tafel gerufen. Dieser schreibt den Beweis des Satzes an, ohne jedoch das Einzelne, was er anschreibt, zu rechtfertigen. Zur Rechtfertigung jeder Einzelheit, die angeschrieben wird, ist die ganze Klasse verpflichtet und deßhalb wird jetzt dieser, jetzt jener aufgefordert und ein jeder muß zur Beantwortung des Abgefragten oder Angeschriebenen bereit sein; — daher die gespannte Aufmerksamkeit in der Klasse, wenn sie auch noch so zahlreich ist! Um das Selbstdenken zu fördern, sind in den Beweisen der Lehrsätze kleine und leichte Mittelsätze weggelassen; so heißt es öfters: dieser Winkel ist jenem Winkel gleich; dieses Dreieck ist jenem gleich oder ähnlich; aber den Grund davon muß der Schüler aufsuchen und angeben. Darum sind auch die zurückweisenden Paragraphen = Citate weggelassen; — der Schüler muß sich selbst darnach umsehen. Auch habe ich gefunden, daß faule oder schwache Schüler jene in den gewöhnlichen Lehrbüchern angebrachten Citate häufig mißbrauchen, sie blind und unbesonnen hersagen, ohne einzusehen, daß die citirte Wahrheit für den vorliegenden Fall paßt. Erst dann, wenn keiner der Mitschüler den Grund anzugeben weiß, ist der vor der Tafel stehende verpflichtet, Red' und Antwort zu geben. Dadurch geschieht es, daß nicht leicht eine Stunde, besonders in dem Unterricht der Geometrie, vorüber geht, wo nicht jeder Schüler eine oder einige Fragen beantworten muß. Zur Förderung des Selbstdenkens und des geistigen Arbeitens sind den Aufgaben dieses Lehrbuchs keine Beweise beigefügt; der Zögling soll sie nunmehr

selbst finden und zeigen, daß das Vorhergehende richtig aufgefaßt und geistig verarbeitet sei — er soll jetzt seine ersten geistigen Ausflüge machen. Es versteht sich von selbst, daß, wenn der redlich Strebende auf die Sache nicht kommt, ihm einige Nachhilfe gewährt wird, welche aber anfangs doch nur in Fingerzeigen besteht.

Wenn eine gewisse Anzahl von Lehrsätzen und Aufgaben durchgearbeitet und wahrhaft begriffen ist: dann werden den Zöglingen Lehrsätze und Aufgaben vorgelegt, welche in dem Lehrbuche nicht stehen, wozu sie aber durch den bisherigen Lehrgang gehörig vorbereitet sind. Ich habe hier schon die erfreulichsten Erfahrungen gemacht. Mancher Zögling hat mir ganz originelle Beweise und Auflösungen, die er unter meinen Augen ausarbeitete, vorgelegt.

Durch diese Methode, welche freilich hier nur ganz kurz angedeutet werden konnte, ist aller Mechanismus, alles blinde Nachbeten, alles geistlose Verfahren verbannt; dagegen wird das Selbstdenken angeregt und gefördert, und die Mathematik wird so in der That die erste sichere Schleifmühle der Geisteskräfte, die Schule der Wahrheitsforschung und das kräftigste Mittel, das fieberhafte Herumhüpfen des Geistes zu verhüten, und Licht und Ordnung in alle Thätigkeiten der Seele zu bringen. Dabei wird immer Vorsicht in Urtheilen und Behauptungen empfohlen und gezeigt, daß die z. B. in einem Lehrsatze aufgestellte Behauptung durchaus nicht von selbst einleuchte, nicht geglaubt oder blindlings angenommen werden dürfe, sondern bewiesen d. h. der

Geist zur Annahme derselben durch Vernunftgründe genöthigt werden müsse; es wird aufmerksam gemacht auf die mannigfaltigen Mittel und Wege, die der Erfinder einer Wahrheit aufgesucht hat, um den Geist zur Anerkennung derselben zu nöthigen, und wie noch jetzt ein Jeder dieselbe Wahrheit und jede andere durch sich allein nacherfinden könne, und Mancher auch, oft auf ganz anderm Wege, gefunden habe. Dadurch gelangen die Zöglinge auch zu der wichtigen und folgenreichen Ueberzeugung, daß es verschiedene Wege zur Wahrheit gibt; — aber nicht blos in der Mathematik, sondern auch in andern Wissenschaften, z. B. in der Philosophie u. s. w.

Ueberhaupt ist es überall darauf abgesehen, den Zögling in ununterbrochener Thätigkeit zu erhalten. So sind besonders die Sätze für die Berechnung der Flächen und Körper zuletzt bis auf die für die Praxis bequemsten Ausdrücke fortgeführt. Dieß hat einen doppelten Vortheil; einmal hat der Schüler beständig Stoff zur Thätigkeit; denn warum ist des Kreises Flächeninhalt $a = p^2 \cdot 0{,}0795 \ldots$ woher ist der Kugel Durchmesser $d = 1{,}2407 \cdot \sqrt[3]{k}$ u. s. w.? — Sodann eignet sich dieses Werkchen zu einem bequemen Handbuch für Künstler, Handwerker u. s. w. Darum möchte es sich für polytechnische und Gewerb-Schulen eben so gut eignen, wie für gelehrte Anstalten. Ueberhaupt ist es eine böse und verderbliche Ansicht, als ob die Schüler der polytechnischen und Gewerb-Schulen die Wahrheiten der Geometrie nur mechanisch und blind erlernen sollen. Gerade diese bedürfen ein ernstliches Studium der Mathematik am ersten.

Absichtlich sind den Aufgaben der Feldmeßkunst keine Beweise oder Rechtfertigungen beigefügt worden. Der Zögling soll sie aus seinem bisherigen Unterrichte selbst angeben.

Auf meine Parallelen-Theorie, die ich in einem Programm weitläuftiger entwickelt habe, mache ich wiederholt aufmerksam.

Auch bin ich bereit, auf Verlangen bei einer neuen Auflage die hier gegebenen Lehren nicht nur zu vermehren und zu erweitern, sondern auch einen kurzen Abriß der Differential- und Integral-Rechnung, so wie der höhern Geometrie beizufügen. Die Abänderungen und Erweiterungen in dieser Ausgabe sind auf das Bedürfniß des Anfängers berechnet worden. Man wird sie, hoffe ich, zweckmäßig finden.

Bayreuth, den 25. Januar 1835.

Dr. Andreas Neubig.

Einleitung in die Mathematik.

§. 1. Die Mathematik ist Größenlehre oder die Wissenschaft von den Größen und dem Verhalten derselben und ihrer Theile zu einander; sie untersucht die Eigenschaften der Größe, und zieht daraus Lehren, um die Größe in allen Fällen möglichst deutlich zu erkennen und genau zu bestimmen.

Es ist aber die Größe (quantitas) eine Form (Bildung, Sein, Bestand) des Stoffes (Bildbaren, Seienden, Bestehenden), und zwar das Vereintsein oder Zusammengesetztsein der Theile eines Gegenstandes (als des Stoffes); daher die Ausdrücke: die Größe des Weges; die Größe der Wiese; die Größe des Hauses u. s. w. Man nennt aber auch das Vereinte selbst, also den Gegenstand (den Stoff, das Bildbare), dem die Größe (quantitas) zukommt, eine Größe (quantum), wenn man z. B. sagt: ausgedehnte Größen. Im letztern Sinne ist es gesagt, wenn Andere die Größe für das erklären, was sich vermehren oder vermindern läßt.

Dasjenige, was zur Bildung einer Größe (quantum) eingeht, muß gleichartig sein. Dinge aber heißen hier gleichartig, mit welchen man einen gemeinschaftlichen Begriff verbinden kann, wenn sie auch nur eine und die andere Eigenschaft gemeinschaftlich haben; im Gegentheile heißen sie ungleichartig.

Das Wort Mathematik kommt aus dem Griechischen (μαθηματικη, μαθησις) und bedeutet Kenntniß, Wissenschaft überhaupt. Diesen Ehrennamen gaben die Griechen, das gebildetste Volk der alten Welt, deßwegen der Größenlehre vorzugsweise, weil sie

unter den damaligen menschlichen Kenntnissen zuerst und im vorzüglichen Grade sich zu einem vollkommen klaren und deutlichen, fest begründeten und regelmäßig geordneten Ganzen von vernünftigen Kenntnissen d. h. zu einer Wissenschaft gebildet hatte.

§. 2. Wenn sich die Mathematik mit idealen d. h. blos gedachten Gegenständen beschäftigt, so heißt sie die reine; hat sie es aber mit vorhandenen Größen zu thun, so nennt man sie die angewandte.

§. 3. Die reine Mathematik begreift in sich zwei Hauptheile. Man kann nämlich die Größe einmal betrachten als eine blose Menge (Vielheit) von gleichartigen Theilen, welche in beliebiger Verbindung (von einander abgesondert oder nicht) sein können; das anderemal als ein aus stetig zusammenhängenden Theilen bestehendes Ganzes. Die Größen der ersten Art nennt man daher unzusammenhängende, unstetige, abgesonderte, (diskrete); die der andern Art aber zusammenhängende, stetige, ausgedehnte oder Raumgrößen. Derjenige Theil der reinen Mathematik, welcher die abgesonderten Größen abhandelt, wird die Arithmetik im Allgemeinen genannt, und derjenige Theil, welcher die ausgedehnten Größen betrachtet, heißt die Geometrie.

§. 4. Die Arithmetik oder die Wissenschaft von den Zahlen, ihren Formen und Verbindungen zerfällt in die niedere und höhere, von welchen jene die gemeine Rechenkunst in bestimmten Zahlen und die Buchstabenrechnung, diese aber die Analysis im weitesten Sinne in sich begreift. Die Analysis ist die allgemeine Darstellung und Entwickelung der Verbindungsarten der Größen durch Rechnung. Sie zerfällt in mehre Zweige, als Kombinationslehre, Algebra, Analysis in engerer Bedeutung, Differential- und Integral-Rechnung u. s. w.

§. 5. Die Geometrie wird gleichfalls in eine niedere und höhere abgetheilt. Die niedere Geometrie zieht in ihre Betrachtung die geraden Linien und ihre Verbindungen, und alle räumlichen Größen, welche von geraden Linien und ebenen Flächen begrenzt werden, mit Einschluß des Kreises, Cylinders, Kegels und der Kugel, in soweit, als darin Verhältnisse gerader Linien verglichen werden. Auch gehört hieher die Trigonometrie oder Dreieckslehre. Die höhere Geometrie untersucht die krummen Linien und alle räumlichen Größen, welche mit krummen Linien in Verbindung stehen.

§. 6. Die angewandte Mathematik wendet die Lehren der reinen Mathematik entweder auf Gegenstände der Natur an, oder auf Geschäfte des menschlichen Lebens, auf Werke der Kunst u. s. w. Im ersten Falle, wo die reine Mathematik vorherrscht, mag man sie die physische; im letztern, worin diese mehr als Dienerin erscheint, die technische Mathematik nennen.

§. 7. Die physisch-angewandte Mathematik hat drei große Haupttheile, nämlich

1) die mechanischen Wissenschaften, welche von der Bewegung und dem Gleichgewichte fester, flüssiger und luftförmiger Körper handeln;
2) die optischen Wissenschaften, welche das Licht betrachten, in sofern es in gerader Linie fortgeht, von andern Körpern zurückgeworfen, oder in durchsichtigen Stoffen gebrochen wird;
3) die astronomischen Wissenschaften — die erhabensten und schwersten aller menschlichen Kenntnisse — welche die Größe, Bewegung und Lage der Weltkörper gegen einander untersuchen, und insbesondere unsere Erde, ihre Gestalt und Größe betrachten, auch die Zeit abmessen und eintheilen lehren, und endlich Anweisung geben, wie Sonnenuhren zu verfertigen sind.

§. 8. Zur technisch-angewandten Mathematik zählt man

1) die praktische Arithmetik d. h. kaufmännische, juristische und politische Rechenkunst;
2) die praktische Geometrie d. h. die Land- und Feldmeßkunst, das Wasserwägen und die Markscheidekunst;
3) die praktische Mechanik, handelnd von dem vortheilhaftesten Bau der Maschinen;
4) die Land- und Wasserbaukunst;
5) die Kriegswissenschaften, und
6) die Seewissenschaften.

§. 8. Die reine Mathematik fängt ihre Betrachtungen und Untersuchungen mit Erklärungen an d. h. mit solchen Sätzen, welche uns einen klaren, vollen und bestimmten Begriff von einem Gegenstande und seinen Merkmalen geben. Der Gegenstand ist nicht von außen gegeben, sondern ein Erzeugniß unsers denkenden Geistes; und er soll nur nicht den Denkgesetzen zuwider gebildet sein. Er braucht nur denkbar, möglich zu sein.

§. 10. Mit den Erklärungen werden Grundsätze (Axiome) in Verbindung gebracht, welches solche Sätze sind, deren Wahrheit aus ihnen selber so offenbar und einleuchtend ist, daß sie von jedem vernünftigen Menschen zugestanden werden muß, und also nicht erst eines Beweises bedarf. Die wichtigsten Grundsätze sollen, da der Anfänger nicht immer auf sie verfällt oder an sie denkt, hier aufgeführt werden:

1) Jede Größe ist sich selber gleich.
2) Das Ganze ist so groß als alle seine Theile zusammen genommen, und größer als einer oder einige davon.
3) Gleiches läßt sich für Gleiches setzen.
4) Zwei Größen, welche der nämlichen dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

5) Gleiche Größen, auf gleiche Art abgeändert, bleiben auch nach der Veränderung einander gleich.
6) Wenn mit einer Größe gleiche entgegengesetzte Veränderungen vorgenommen werden, so bleibt sie ohne Aenderung in ihrem vorigen Zustande.
7) Wenn man Gleiches zu ungleichen Größen hinzusetzt, so sind die zusammengesetzten Größen ungleich, und zwar ist diejenige die größere, welche zuerst die größere war.
8) Wenn man Gleiches von ungleichen Größen wegnimmt, so sind die übrig bleibenden Größen ungleich, und zwar ist diejenige die größere, welche Anfangs die größere war.
9) Wenn man Ungleiches zu gleichen Größen hinzu thut, so wird diejenige die größere, welche Mehr erhalten hat.
10) Wenn man Ungleiches von gleichen Größen wegnimmt, so wird diejenige die größere, von welcher Weniger, und diejenige wird die kleinere, von welcher Mehr weggenommen worden ist.

§. 11. Jede Wahrheit in der Mathematik, welche aus den Erklärungen, Grundsätzen und sonst schon begründeten Sätzen durch Anwendung der logischen Schlüsse, worin Gründe mit ihren Folgen zusammengestellt werden, entdeckt, erfunden oder erprüft wird, spricht der Lehrsatz aus, welchem daher stets ein zureichender, vollständiger, streng geführter Beweis beigefügt wird. Ein solcher Beweis kann ein direkter sein, welcher geradezu auf die Folge hinweiset und hinführet, oder ein indirekter (apagogischer), welcher auf Ungereimtheit oder Widersinnigkeit deutet und führt, wenn man den zu begründenden Satz nicht für wahr annehmen wollte. Er ist synthetisch (progressiv), wenn er vom Hauptgrunde zu den nähern Folgegründen herabsteigt; analytisch (regressiv), wenn er zu dem Hauptbeweisgrunde aufsteigt.

§. 12. Solche Wahrheiten, die in andern schon ganz enthalten oder ganz leicht daraus herzuleiten sind, werden

unter dem Namen der Zusätze aufgeführt, und darum ohne Beweise hingestellt.

§. 13. Wenn verlangt wird, daß etwas noch Unbekanntes aus gegebenen Dingen unter gewissen Bedingungen gemacht oder erfunden werden soll: so wird dieß in einer Aufgabe angezeigt, welcher die Auflösung beigefügt wird, worin gezeigt wird, auf welche Weise das Verlangte zu Stande kommt. Der beigegebene Beweis belehrt uns über die Richtigkeit des Verfahrens. Fehlt derselbe: so wird dem Leser zugemuthet, ihn selbst zu finden.

§. 14. Alles, was sonst noch der Mathematiker auf den Herzen hat, faßt er in den Anmerkungen zusammen, welche demnach Erläuterungen, Anwendungen, Geschichtliches der vorgetragenen Sätze u. a. m. enthalten können.

§. 15. Sieht man nun auf den Gang, den die Mathematik in ihren Untersuchungen nimmt, auf den Geist, der sie durchdringt: so darf man sich nicht wundern, daß die Mathematik allein bis jetzt die höchste Stufe der Ausbildung und Vollkommenheit erstiegen, und alle andere Wissenschaften weit hinter sich gelassen hat. Der wohlthätige Einfluß ihres Inhalts auf das ganze menschliche Leben ist anerkannt. »Wenig menschliche Verrichtungen sind, sagt Kästner, von denen nicht ein Theil auf mathematischen Gründen beruht; und eine Wissenschaft muß doch wohl nützlich sein, deren Verbindung mit allen menschlichen Beschäftigungen so offenbar ist.« Und abgesehen von ihrem Inhalte ist die Mathematik darum von den größten Geistern aller Zeiten und Völker hoch verehrt worden, weil ihr Studium auf den Geist in seiner Ausbildung höchst wohlthätig einwirkt, ihn übt in der Erfindung, Untersuchung und Prüfung der Wahrheit überhaupt; ihn sichert gegen die Beherrschung der leicht ausschweifenden Phantasie, und bewahrt vor Irrthum, Aberglauben, Schwärmerei und Mysticismus. Dieses Studium erregt, belebt

und schärft den Sinn für Wahrheit und entzündet eine uneigennützige Liebe zu ihr, welche die Grundlage aller Sittlichkeit ist; es leitet und gewöhnt zur Ordnung und Schärfe im Denken und zum Ueberschauen großer Schlußketten eben so, wie zur Deutlichkeit, Bestimmtheit, Kürze und Gediegenheit in der Darstellung des Gedachten. *)

Unverdächtig wird das Lob der Mathematik erscheinen, wenn man es aus dem Munde hochgefeierter Männer vernimmt, welche ihre Kräfte einem andern Berufe gewidmet, aber tiefe Blicke in die Mathematik gethan haben. Platon sagt: Nur die Mathematik ist im Stande, das Organ der Seele, wenn es durch die übrigen Beschäftigungen des Lebens ausgelöscht und geblendet ist, wieder zu reinigen und zu beleben. Er erklärt deßwegen auch denjenigen, dessen Geist nicht durch Mathematik gebildet worden ist, für einen thörichten und unverständigen Menschen. Ueber der Thüre seines Hörsales standen die Worte: »Kein Nicht-Mathematiker trete herein!« Ja, er gab der Mathematik einen so hohen Rang, daß er sogar behauptete: sie sei die ewige Beschäftigung der Gottheit. Hippokrates empfahl seinem Sohne das Studium der Mathematik, weil es seinen Geist schärfen, und ihn selbst zu Untersuchungen über die Heilkunst tüchtig machen würde. Geßner, der Philolog, beschäftigte sich nicht nur gerne und fleißig mit Mathematik, sondern empfahl sie auch seinen Schülern als eine für das Studium der Philologie unentbehrliche Wissenschaft, und Ruhnken sagt: Alles,

*) Das Verfahren der Mathematik, mit sehr wenig Zeichen sehr viel Begriffe verständlich und bequem auszudrücken, wird nicht in allen Wissenschaften bei den Kunstwörtern nachgeahmt. Besonders pflegen einige Philosophen auch dadurch den großen Unterschied zwischen ihrer philosophischen und der mathematischen Methode anzuzeigen, daß sie mit vielen Zeichen wenige Begriffe und oft gar keine ausdrücken. Kästner.

was Hemsterhuis sprach oder schrieb, selbst was kritischer Art war, hatte für Jedermann den Charakter der höchsten Klarheit — eine Folge seiner Gewöhnung an geometrische Strenge und Bestimmtheit. Die Mathematik, sagt Thiersch, ist die Königin der Wissenschaften.

Bemerkenswerth ist es, daß besonders unter teutschen Theologen die Mathematik stets viele Verehrer gefunden hat. Ich nenne nur Dörfel*), einen Geistlichen zu Plauen im Voigtlande, Clemm, Häseler, Schultz, Block**), welche sich durch gediegene mathematische Schriften ausgezeichnet haben, und lasse für Alle einen alten Theologen über die Mathematik sprechen. »Wenn ich Kinder hätte«, sagt derselbe, »so sollten sie mir lernen die ganze Mathematika u. s. w. Hab dafür lernen müssen ...... die Sophisten, daß ich genug habe davon auszufegen.«

---

*) Von diesem sah sich leider! Kästner veranlaßt zu singen: Doch Newton wird gerühmt und Dörfel bleibt vergessen.

**) Dieser äußert sich irgendwo also: Unleugbar begünstigt die Unwissenheit in der Mathematik den anmaßenden Dünkel eingebildeten Wissens, und eine gewisse Berauschung, die selbstgenügsam, redselig und vornehm — absprechend werden läßt, statt daß die Kenntniß der Mathematik nüchtern, bescheiden, demüthig, ja beschämt und wortarm (besonders gegen hohe Vielwisser) macht, und nur den Fehler erzeugt, sich durch geistliches Ansehen nicht imponiren zu lassen. — Und wenn die Mathematik freilich dem geheimen Hasse der Fakultätsleute nicht entgehen wird, wegen des demüthigen Vorzuges, daß man ohne sie in allen übrigen Wissenschaften nur tappen kann, so muß es ihr dagegen Zuneigung erwerben, daß sie, wie sonst keine andere, eine Schule der Wahrheit und Gerechtigkeit ist; woraus man in aller Bescheidenheit die Folge zieht, sie müsse das rechte Licht aus Gott sein".

Arithmetik.

Erstes Kapitel.

Von den Zahlen, ihrer Bezeichnung und Aussprache.

§. 1. Die Zahl ist eine blos gedachte Sache, an der man betrachtet: Wie viel sie ist. Die Menge der Dinge selbst ist daher für sich noch keine Zahl, z. B. ein Haufen Sand; sondern wird es erst dadurch, daß man diese Menge als ein Vielfaches betrachtet oder unter den Begriff der Quantität (Vielheit) bringt. Die Einheit ist dasjenige, welchem das Vereintsein (mit andern Gleichartigen) zukommt; durch die Wiederholung derselben entsteht die Vielheit. Man kann daher auch sagen: Das Gemeinsame in der Vielheit ist die Einheit; ebenso: die Zahl ist ein Inbegriff von gleichartigen Einheiten. Die Rechenkunst lehrt nun die Eigenschaften der Zahlen und das richtige und sichere Verfahren, aus bekannten und bestimmten Zahlen und ihrem Verhalten zu einander andere unbekannte, welche auf die gegebene eine bestimmte Beziehung haben, zu finden.

§. 2. Eine Zahl, bei welcher man einzig und allein die Menge ihrer Einheiten betrachtet, heißt eine unbenannte Zahl, z. B. acht (8); wenn man sie aber auf einen bestimmten Gegenstand bezieht oder anwendet, so heißt sie benannt, z. B. acht Menschen.

§. 3. Durch Wiederholung der ganzen Einheit entstehen ganze Zahlen. Wenn aber die Einheit oder

überhaupt ein Ganzes in gleiche Theile getheilt ist, so heißt die Zahl, welche einen oder mehre solcher gleichen Theile angibt, eine gebrochene Zahl oder ein Bruch.

§. 4. Wenn ein Sternchen eine Einheit bezeichnet, so kann man sich die Benennung und Größe (Werth) der ersten ganzen Zahlen, wie sie nach und nach aus der Zusammensetzung der Einheit entstehen, also vorstellig machen:

Eins	*
Zwei	* *
Drei	* * *
Vier	* * * *
Fünf	* * * * *
Sechs	* * * * * *
Sieben	* * * * * * *
Acht	* * * * * * * *
Neun	* * * * * * * * *
Zehn	* * * * * * * * * *

Zehn und Eins zusammen heißt Eilf, Eilf und Eins heißt Zwölf, Zwölf und Eins heißt Dreizehn u. s. w. Zehn und zehn heißt Zwanzig; von da an zählt man weiter: Ein und zwanzig, Zwei und zwanzig, u. s. w. Zwanzig und zehn oder dreimal zehn heißt Dreißig, viermal zehn heißt Vierzig u. s. w. Zehnmal zehn nennt man Hundert; zehnmal hundert gibt Tausend; tausendmal tausend heißt eine Million; millionenmal eine Million gibt eine Billion; millionenmal eine Billion heißt eine Trillion u. s. w.

§. 5. Die neun ersten Zahlen heißen Einer oder einfache Einheiten; zehn Einheiten heißen eine Einheit der ersten Ordnung d. i. ein Zehner; zehn Einheiten der ersten Ordnung nennt man eine Einheit der zweiten Ordnung d. i. einen Hunderter; zehn Einheiten der zweiten Ordnung heißen eine Einheit

der dritten Ordnung d. i. ein Tausender; u. s. w. so daß eine Million zur sechsten, eine Billion zur zwölften, eine Trillion zur achtzehnten, eine Quatrillion zur vier und zwanzigsten Ordnung u. s. w. gehört. Daraus wird man leicht einsehen, daß die Einheit jeder höhern Ordnung zehn Einheiten der nächstniedrigern in sich begreift.

§. 6. Die zur Bezeichnung der ersten neun Zahlen oder der Einer eingeführten Zeichen oder Ziffern sind folgende: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Durch eben diese Ziffern können aber auch alle höheren Zahlen ausgedrückt werden. Dieß geschieht dadurch, daß die Ziffern durch die Stelle, in welcher sie stehen, von der Rechten gegen die Linke einen immer zehnmal größern Werth erhalten als in der nächstvorhergehenden. Diesemnach stehen in der ersten Stelle zur Rechten die Einer; in der zweiten von der Rechten gegen die Linke stehen die Zehner oder die Einheiten der ersten Ordnung; in der dritten die Hunderte oder die Einheiten der zweiten Ordnung; in der vierten die Tausende oder die Einheiten der dritten Ordnung; in der fünften die Zehntausende oder die Einheiten der vierten Ordnung; in der sechsten die Hunderttausende oder die Einheiten der fünften Ordnung; in der siebenten die Millionen oder die Einheiten der sechsten Ordnung; in der achten die Zehnmillionen oder die Einheiten der siebenten Ordnung u. s. w. Die dreizehnte Stelle nehmen die Billionen, die neunzehnte die Trillionen, und die fünfundzwanzigste die Quatrillionen ein. Wenn Einheiten einer gewissen Ordnung in einer Zahl, wo doch Einheiten einer höhern Ordnung vorkommen, fehlen: so bezeichnet man ihre Stelle mit 0 (Null), so daß die Null die Stellvertreterin einer fehlenden Ordnung oder Art ist.

§. 7. Nach diesen Erklärungen wird man ohne Schwierigkeit vorgelegte Zahlen aussprechen, und vorgesprochene

niederschreiben können. So bedeutet 6 sechs; aber 64 sechzig und vier d. i. vier und sechzig; 604 bedeutet sechs Hunderte, kein Zehner, 4 Einer oder sechshundert und vier; 6354 ist sechs tausend drei hundert und vier und funfzig; 63054 ist drei und sechzig tausend und vier und funfzig; wo also die Null anzeigt, daß die Ordnung der Hunderte fehlt; 670154 bedeutet sechs hundert siebenzig tausend einhundert und vier und funfzig, wo die einfachen Tausende oder die Einheiten der dritten Ordnung fehlen. 2361834 liest man: zwei Million drei hundert ein und sechzig tausend acht hundert und vier und dreißig. Die Hauptsache beruht darauf, daß man vor Allem sich übe, sechs Ziffern leicht aussprechen zu können. Denn die Ziffern nach der sechsten Stelle gegen die Linke werden gleichsam als für sich bestehend betrachtet, nur daß sie Millionen bezeichnen; eben so die Ziffern nach der zwölften Stelle, welche Billionen darstellen u. s. w. Zur Erleichterung mache man über die siebente Ziffer, von der Rechten gegen die Linke gerechnet, einen Strich oder Punkt zur Bezeichnung der Millionen; über die dreizehnte Ziffer zwei Striche oder Punkte zur Bezeichnung der Billionen, über die 19te Ziffer drei für die Trillionen u. s. w. z. B. folgende Zahl

2310740087615000264201398

wird ausgesprochen: Zwei Quatrillionen, dreihundert zehntausend siebenhundert und vierzig Trillionen, siebenundachtzig tausend sechshundert und fünfzehn Billionen, zweihundert und vierundsechzig Millionen, zweihundert und eintausend dreihundert und achtundneunzig.

Das Verfahren, Zahlen auszusprechen und zu schreiben, heißt das Numeriren.

§. 8. Die Ordnung der Zahlen kann man durch kleine Ziffern, die man über die zugehörigen Ziffern setzt, andeuten und durch diese kleinen Ziffern, die man Ordnungs-

exponenten nennt, sehr große Zahlen, welche sich mit vielen Nullen endigen, kurz schreiben. Z. B. die Zahl 35082 wird mit Ordnungsexponenten also geschrieben $\overset{4\,3\,2\,1}{35082}$ Denn die Ziffer 8 bezeichnet die Zehner oder die erste Ordnung; 0 die Hunderte oder die zweite Ordnung u. s. w. Und $\overset{10\,9\,8\,7}{6539}$ oder einfacher $\overset{10}{6539}$ ist so viel als 65390000000. Wenn nämlich der Ordnungsexponent einer einzigen Ziffer bekannt ist, so sind dadurch zugleich auch alle übrigen bekannt; und es ist gleichviel, welchen man setzen will; daher kann das letzte Beispiel auch also geschrieben werden $\overset{9}{6539}$ oder $\overset{8}{6539}$ oder $\overset{7}{6539}$.

§. 9. Die Art und Weise, einer und derselben Zahl in verschiedenen Stellen nach einem bestimmten Gesetze verschiedene Werthe beizulegen, um danach jede Zahl durch Ziffern und das Stellenzeichen (Null) ausdrücken zu können, nennt man ein Zahlensystem. In unserm Systeme wird, wie aus dem Bisherigen erhellet, bis Zehn fortgezählt, so daß allemal zehn Einheiten von einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächsthöhern ausmachen. Weil nun in demselben Zehn als Grundzahl herrscht, so heißt es das zehntheilige oder dekadische System, welches bei allen mehr oder minder gebildeten Völkern eingeführt ist.

§. 10. Nothwendig aber ist es gar nicht, bis auf Zehn zu zählen, ja die alten Thracier sollen wirklich nur bis Vier gezählt haben. Man kann überhaupt jede größere oder kleinere Zahl als Zehn wählen. Je weiter man zählt, desto mehr Ziffern braucht man; im entgegengesetzten Falle desto weniger. Wenn man blos bis Zwei zählt, so entsteht das gezweite oder dyadische Zahlensystem, zu welchem man blos die zwei Zeichen 1 und 0 braucht. Nach diesem Systeme bedeutet z. B.

1	eins	1001	neun	10001	siebenzehn
10	zwei	1010	zehn	10010	achtzehn
11	drei	1011	eilf	10011	neunzehn
100	vier	1100	zwölf	10100	zwanzig
101	fünf	1101	dreizehn	10101	einundzwanzig
110	sechs	1110	vierzehn	10110	zwei u. zwanzig
111	sieben	1111	funfzehn	10111	drei u. zwanzig
1000	acht	10000	sechzehn	11000	vier u. zwanzig

u. s. w.

vergl. Brander's arithmetica binaria sive dyadica d. i. die Kunst nur mit zwei Zahlen in allen vorkommenden Fällen sicher und leicht zu rechnen. Augsb. 1770.

§. 11. Zu erwähnen ist hier noch, daß die Franzosen auch nach Milliarden zu zählen pflegen. Dieß sind Tausende von Millionen. Darnach wird die Zahl 24706130005 gelesen: Vierundzwanzig Milliarden, siebenhundert und sechs Millionen, hundert und dreißig Tausend und fünf.

§. 12. Man kann sich jede Einheit und jede Größe als ein Ganzes vorstellen, z. B. 1 Pfund, 1 Gulden. Durch die Wiederholung der ganzen Einheit entstehen ganze Zahlen, z. B. 1 Pfund 6mal genommen gibt 6 Pfunde. Eben so sind 8 Lothe, 12 Kreuzer, ohne Beziehung auf andere Größen betrachtet, Größen, welche durch ganze Zahlen ausgedrückt werden. Aber in Bezug auf Pfunde sind 8 Lothe nur Theile von 1 Pfund, weil erst 32 Lothe 1 Pfund ausmachen; und 12 Kreuzer sind in Bezug auf 1 Gulden auch nur Theile von 1 ganzen Gulden; denn 60 Kreuzer betragen erst 1 Gulden. Solche Zahlen, welche Einen oder mehre von den gleichen Theilen ausdrückt, worein eine Einheit oder ein Ganzes getheilt ist, heißen gebrochene Zahlen oder Brüche.

§. 13. Mit den Zahlen können vier Hauptverrichtungen und Veränderungen vorgenommen werden. Diese sind 1) die Addition oder das Verfahren, mehre am Werthe

von einander verschiedene Zahlen in einer einzigen auszudrücken, welche in einem Inbegriffe dasselbe befassen soll, was gesondert in jenen einzelnen enthalten ist. Diejenige Zahl, welche jenen einzelnen zusammen genommen gleich ist, heißt die Summe. 2) Die Multiplikation, welche eine Zahl oder Größe so und so oft nehmen heißt, als es eine andere gegebene Zahl anzeigt. Die erstere Zahl wird der Multiplikand, die andere der Multiplikator genannt, beide Zahlen heißen auch Faktoren, und die durch die Multiplikation gefundene Zahl nennt man das Produkt. 3) Die Subtraktion oder das Abziehen lehrt den Unterschied oder die Differenz zweier Zahlen finden. Oder eine Zahl von einer andern abziehen (subtrahiren) heißt eine dritte Zahl finden, welche den Unterschied jener zwei Zahlen angibt. Diejenige Zahl, von welcher der Abzug geschieht, wird der Minuend genannt; welche abgezogen wird, der Subtrahend; was übrig bleibt, heißt der Rest, Unterschied. Man sieht, daß es in dem Wesen der Subtraktion liegt, daß man dem Subtrahenden dasjenige gebe (addire), was ihn dem Minuenden gleich macht; denn dadurch wird der Unterschied aufgehoben. 4) Die Division, wodurch man findet, wie und wie oft eine Zahl (Divisor genannt) in einer andern (Dividend genannt) enthalten ist. Die hierdurch gefundene Zahl heißt der Quotient. Man kann auch sagen: Eine Größe oder Zahl (den Dividenden) durch eine andere (den Divisor) theilen oder dividiren heißt jene so und in so viele gleiche Theile theilen, als diese angibt, mithin einen solchen Theil oder eine solche Zahl (Quotienten) finden, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividenden wieder gibt. In jedem Falle ist der Dividend ein Produkt, welches den Divisor und Quotienten zu seinen Faktoren hat.

Die hier aufgezählten Rechnungsarten sind unter dem Namen der **vier Species der Rechenkunst** bekannt.

§. 14. Für die eben erwähnten Grundrechnungen sind folgende Zeichen eingeführt, nämlich

$+$ (ein stehendes Kreuz) für die Addition;

$-$ (ein Querstrich) für die Subtraktion;

$\times$ (ein liegendes Kreuz) oder (.) ein Punkt für die Multiplikation;

$:$ (zwei über einander stehende Punkte) für die Division, so daß vor diesem Zeichen der Dividend, und nach demselben der Divisor zu stehen kommt. Für die Division gebraucht man auch den Querstrich, so daß man über denselben den Dividenden und unter denselben den Divisor setzt.

Damit verbinden wir sogleich auch die Erklärung einiger andern mathematischen Zeichen, nämlich

$=$ zeigt die Gleichheit zweier Größen an; dagegen

$>$ oder $<$ die Ungleichheit oder Verschiedenheit derselben, so daß die größere Größe ihre Stelle bei der Oeffnung des Zeichens, die kleinere aber an der Spitze desselben bekommt.

∞ ist das Zeichen einer unendlich oder unermeßlich großen Zahl.

§. 15. Wenn Summen, Unterschiede oder aus Summen und Unterschieden zusammengesetzte Größen in die verschiedenen Rechnungsarten eingehen: so müssen sie in Haken eingeschlossen werden. Und nun wird man leicht folgende Ausdrücke verstehen:

$12 + 6 = 18$; $15 - 7 = 8$; 5×7 oder $5 . 7 = 35$; $24 : 8$ oder $\frac{24}{8} = 3$; $17 > 10$ oder $10 < 17$; ferner

$(8 + 4) . 3 = 12 . 3 = 36$

$8 + 4 . 3 = 8 + 12 = 20$

$(12 + 18) : 6 = 30 : 6 = 5$

$12 + 18 : 6 = 12 + 3 = 15$ u. s. w.

Zweites Kapitel.

Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen.

I. Die Addition.

§. 16. Aufgabe. Verschiedene Zahlen zu addiren.

Auflösung. Man schreibe die Zahlen so untereinander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter, Tausender unter Tausender u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe einen Strich darunter.

Nun zähle man alle in der ersten Reihe rechter Hand d. h: in der Reihe der Einer befindlichen Zahlen zusammen und setze die Menge der Einer unterhalb des Striches unter die Einer; die Zehner, Hunderter u. s. w. aber, die sie etwa noch enthält, werden zu den Zehnern, Hunderten u. s. w. gezählt und müssen daher im Sinne behalten oder über dem Strich zu den Zehnern, Hunderten hingeschrieben werden.

Hierauf zähle man alle Zahlen der zweiten Reihe d. i. der Zehner mit den aus der ersten Reihe im Sinne behaltenen oder über den Strich hingeschriebenen zusammen. Wenn die Summe derselben aus mehr als einer Ziffer besteht, so enthält die niedrigste die Zehner, welche unterhalb des Striches unter die Zehner gesetzt wird; die zweite Ziffer sind Hunderter, die dritte Tausender, welche daher auch zu den Hundertern, Tausendern u. s. w. gezählt werden müssen. Sie werden demnach im Sinne behalten oder sogleich oberhalb des Striches zu ihren Reihen gesetzt.

Alsdann zähle man die Zahlen der dritten Reihe d. i. der Hunderter nebst den aus der vorigen Reihe im Sinne behaltenen oder ausdrücklich hingeschriebenen Zahlen zusammen. Die Hunderter dieser Reihe zusammen schreibe man unter die Hunderter; aber die Tausender, Zehntau=

sender, die etwa in derselben Reihe enthalten sein möchten, zähle man zu ihren zugehörigen Ordnungen, wie vorhin.

Und so fahre man fort, bis man zur letzten Reihe d. i. zur höchsten Ordnung der gegebenen Zahlen kommt, deren Summe dann ganz hingeschrieben wird.

Nachstehendes Beispiel ist so gerechnet, einmal, daß die aus einer Reihe in die andere überzutragenden Zahlen einschließungsweise hingeschrieben sind; das anderemal so, daß man sie im Sinne behält:

		6	0	3	8	4	60384
			7	2	3	3	7235
		8	6	1	1	0	86110
				5	3	9	539
					1	8	18
			5	2	0	4	5204
		(1)	(1)	(1)	(2)		
Summe	1	5	9	4	8	8	159488

Aus der Art des Verfahrens erhellet zugleich die Richtigkeit desselben. Denn bei der Addition will man wissen, wie viel Einer, Zehner, Hunderter rc. rc. mehre einzelne Zahlen ausmachen — und dieß wird durch obiges Verfahren bewerkstelliget.

§. 17. Um sich zu überzeugen, daß man sich im Zusammenzählen nicht geirrt habe, ist es gut, das nämliche Beispiel zweimal, nämlich einmal aufwärts, das anderemal abwärts zu rechnen. Eine andere Probe kann erst bei der Subtraktion gezeigt werden.

II. Die Subtraktion.

§. 18. Aufg. Eine kleinere Zahl von einer größern zu subtrahiren oder abzuziehen.

Aufl. Man schreibe die kleinere Zahl so unter die größere, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe dann einen Strich.

Hierauf nehme man die Einer des Subtrahends von den Einern des Minuends weg und setze den Rest unterhalb des Striches unter die Einer; eben so verfahre man mit den Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w. bis zur letzten oder höchsten Ordnung der gegebenen Zahlen: so wird der Aufgabe ein Genüge geschehn.

Wenn eine untere Zahl größer sein sollte als eine obere, und also der Abzug nicht geradezu geschehen kann: so borge man in der nächsthöhern Ordnung des Minuends eine Einheit oder 1. Diese gibt, wie man (aus §. 5 und 9.) weiß, 10 Einheiten für die Stelle, für welche geborgt wird: man addire also diese 10 zu dieser Stelle und man wird dann immer abziehen können.

Damit man es nicht übersehe und vergesse, daß von der nächstfolgenden Ziffer eine Einheit geborgt worden und sie also um 1 verringert ist, so kann man diese Ziffer mit einem Punkt bezeichnen.

Ereignet es sich, daß die Ziffer, von der eine Einheit geborgt wird, eine Null (0) ist: so muß diese selbst erst von der nächsthöhern Ordnung eine Einheit für sich borgen. Dadurch wird die Null zu 10 und weil eine Einheit für die nächstniedrige Ziffer abgegeben wird, so bleiben an der Stelle der Null nur noch 9 Einheiten übrig. Eben so verhält es sich auch, wenn mehre Nullen nach einander folgen. Beispiele:

Minuend	835764	1562388
Subtrahend	611353	725417
Rest	224412	Rest 836971

4526082	78062004
632493	741536
3893589	77320468

§. 19. Wenn man zu einem Rest die Zahl wieder hinzufügt, die man von einer gewissen Summe weggenommen hatte: so muß nothwendig die vorige Summe wieder

zum Vorschein kommen. Man addire also zum Rest den Subtrahenden; und es wird der Minuend herauskommen. Dieß dient als Probe der Subtraktion. Z. B.

```
     218045                    650047
     137846]                   138229]
Rest  80199]  addirt   Rest 511818]  addirt
     218045                    650047
```

§. 20. Die Subtraktion dient aber auch der Addition zur Probe, dadurch, daß wenn man die Hauptsumme gefunden hat, man die summirenden Zahlen nochmals addirt, aber eine von ihnen, z. B. die oberste, wegläßt, und nun diese Theilsumme von der Hauptsumme abzieht. Der Rest muß die weggelassene Zahl geben. Z. B.

```
730852
66109
 31074
   342
828377  Hauptsumme
 97525  Theilsumme
730852  Rest, wie die weggelassene Zahl.
```

III. Die Multiplikation.

§. 21. Ehe man zum Multipliciren schreitet, muß man sich mit dem sogenannten Ein mal Eins bekannt machen, welches die Produkte aller einfachen Zahlen oder der Einer enthält und in folgendem Täfelchen dargestellt ist:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	52	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Das Produkt von zwei einfachen Zahlen findet man

immer da, wo die lothrechte und wagrechte Reihe durch beide Zahlen sich schneiden, z. B. 6. 8 = 48 und 8. 6 = 48; woraus zugleich erhellet, daß einerlei Produkt herauskommt, wenn gleich die Faktoren ihre Stellen verwechseln, wie hier 6. 8 und 8. 6 immer 48 geben.

Diese Wahrheit geht auch aus folgender Betrachtung hervor. Nämlich Multipliciren heißt, den Multiplikand und also auch jede seiner Einheiten so oft setzen, als der Multiplikator verlangt. Aber eine Einheit so oft setzen als der Multiplikator anzeigt, heißt, diesen selbst setzen. Man bekommt also für jede Einheit des Multiplikanden den Multiplikator, und damit ist die eben angedeutete Verwechselung schon vorgegangen, so daß z. B. 5. 3 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1). 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3.5 und allgemein a. b = b. a ist.

§. 22. Aufg. Eine jede Zahl mit einer einfachen Zahl zu multipliciren.

Aufl. Von der Rechten gegen die Linke anfangend mache man die Produkte einer jeden Ziffer des Multiplikanden in den Multiplikator, setze die niedrigste Ziffer eines jeden einzelnen Produktes in eben die Stelle, wo die Ziffer des Multiplikanden stehet, und addire die höchste Ziffer, welche etwa noch vorkommt, zum nächsten folgenden Produkte. Z. B.

7012045	Multiplikand
6	Multiplikator
42072270	Produkt.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird man aus folgender Betrachtung erkennen. Indem man die 5 Einer des Multiplikanden 6mal nimmt, erhält man 30 Einer d. i. 3 Zehner und keinen Einer. Die Null unter dem Strich zeigt an, daß keine Einer vorhanden sind; die 3 Zehner aber sind natürlich zu den folgenden Zehnern gezogen worden, nämlich 4 Zehner 6mal genommen geben 24

Zehner, und 3 Zehner aus den vorigen Einern dazu, machen 27 Zehner d. i. 2 Hunderter und 7 Zehner. Die 7 Zehner sind unter die Zehner gesetzt worden, und die 2 Hunderter kommen zu den Hunderten. Hier aber sollen gar keine Hunderter genommen werden (6. 0 = 0); darum wurden die 2 aus den Zehnern entstandenen Hunderter geradezu an ihre Stelle gesetzt. 2 Tausender 6mal genommen geben 12 Tausender d. h. 1 Zehntausender und 2 Tausender; diese sind unter den Tausendern bemerkt, und jene zu den Zehntausendern addirt worden; nämlich 1 Zehntausender 6mal genommen gibt 6 Zehntausender und 1 aus den vorigen gewonnen macht 7 Zehntausender, die man an ihrer Stelle findet. Hunderttausender sollen gar nicht genommen werden; dieß ist durch eine Null an ihrem Orte bemerket worden. 7 Millioner sollen 6mal genommen werden; dieß gibt 42 Millioner, welche auch ihren Platz erhalten haben.

Man könnte das ganze Verfahren auch versinnlichend darstellen auf folgende Weise

58736	
5	
30	Einer
15	Zehner
35	Hunderter
40	Tausender
25	Zehntausender
293680	Produkt.

§. 23. Aufg. Eine jede Zahl mit einer jeden andern zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach der Reihe die einzelnen Ziffern des Multiplikanden, wie vorhin, erstlich in die Einer, dann in die Zehner, Hunderter des Multiplikators u. s. w. nur daß man die einzelnen Produkte immer um eine Stelle weiter zur Linken rückt, so oft man mit einer höhern Stelle des Multiplikators zu multipliciren anfängt, so daß

allemal die niedrigste Ziffer eines jeden Produktes unter diejenige Ziffer des Multiplikators, von welcher das Produkt herrührt, zu stehen komme.

Wenn daher in dem Multiplikator Nullen vorkommen, so muß man die Produkte auch wegen einer jeden Null um eine Stelle weiter fortrücken.

Am Ende addire man alle einzelne Produkte zusammen, so erhält man das Produkt der beiden gegebenen Zahlen. Beispiele:

```
  150874          42187
     359           6032
 -------        ---------
 1357866           84374
 754370          126561
452622          253122
--------        ---------
54163766        254471984
```

Das stufenfolge Einrücken der einzelnen Produkte erklärt sich, wenn man ein Beispiel vollständig rechnet und hinschreibt, also:

```
  150874
     359
 -------
 1357866 das Neunfache
 7543700 das Fünfzigfache
45262200 das Dreihundertfache
--------
54163766
```

§. 24. Wenn der Multiplikand und der Multiplikator am Ende Nullen haben, so braucht man nur die geltenden Ziffern, wie bisher, unter einander zu schreiben, und dann wie vorhin zu verfahren. An das Produkt werden dann so viele Nullen gesetzt, als beide Faktoren zusammen genommen haben. Z. B.

```
1093000          913200
     80           17000
--------        -----------
87440000          63924
                 9132
                -----------
                15524400000
```

IV. Die Division.

§. 25. Aufg. Eine jede Zahl durch eine einfache zu dividiren.

Aufl. Man schreibe den Divisor zur Linken neben dem Dividenden, und suche zur Rechten den Quotienten auf folgende Weise: Man vergleiche den Divisor mit der höchsten Ziffer des Dividenden, oder, wenn diese kleiner als der Divisor ist, mit den zwei höchsten Ziffern desselben; und untersuche, wie oft er darin enthalten ist. Die Zahl, die dieses Vielfache anzeigt, gibt die höchste Ziffer des zu suchenden Quotienten. Mit ihr multiplicire man nun den Divisor; ziehe das Produkt von den Ziffern des Dividenden ab, mit welchen der Divisor verglichen wurde, und schreibe den Rest, wenn einer übrig bleibt, darunter.

Nun nehme man die nächst niedrigere Ziffer des Dividenden zur Rechten, setze sie unter den Strich und zwar rechts neben dem etwa gebliebenen Rest, untersuche wiederum, wie vielmal der Divisor in der dadurch erhaltenen Ziffer steckt. Die Zahl, welche dieses Vielfache anzeigt, gibt die nächstniedrigere Ziffer des Quotienten. Mit ihr multiplicire man den Divisor und ziehe das Produkt von der verglichenen Zahl ab.

Zu dem etwaigen Reste bringe man die folgende Ziffer des Dividenden und behandele diese Zahl, so wie jeden folgenden Rest und die dazu genommene Ziffer des Dividenden, wie die vorhergehenden Zahlen, bis man jede Ziffer des Dividenden mit dem Divisor verglichen und auf diese Weise alle Ziffern des Quotienten nach und nach gefunden hat.

Wenn bei einer Subtraktion kein Rest übrig bleibt, und die heruntergebrachte Ziffer des Dividenden kleiner als der Divisor ist, folglich in ihr der Divisor gar keinmal steckt: so schreibe man eine Null an die zugehörige Stelle

des Quotienten. Hierauf nehme man die nächstfolgende Ziffer des Dividenden herab und verfahre wie vorhin. Beispiele:

1) Divisor	Dividend	Quot.
2	7308	3654
	6	
	13	
	12	
	10	
	10	
	8	
	8	
	*	

2) Divis.	Divid.	Quot.
8	23264	2908
	16	
	72	
	72	
	64	
	64	
	*	

Das richtige Verfahren der Division erhellet aus folgender vollständigern Darstellung des zweiten Beispiels:

8	23264	(2000	
	16000	900	addirt
	7264	00	
	7200	8)	
	64	2908	wie vorhin.
	64		

Nämlich 8 ist in 23264 nur 2000mal enthalten, weil 3000 . 8 schon 24000 ausmachen; aber 8 . 2000 = 16000; diese werden von 23264 abgezogen, bleibt zum Rest 7264. Weil in diesem Rest die Zahl 8 mehre hundertmal steckt, nämlich 900 mal, so wird abermals das Produkt 8 . 900 = 7200 von der Zahl 7264 abgezogen; und es bleibt zum Rest 64. Nach den Hunderten ist nachzusehen, ob auch 8fache Zehner im Reste 64 enthalten sind. Allein schon ein Zehner 8 mal genommen (d. i. 8 × 10 = 80) gibt 80. Also ist in 64 die Zahl 8 kein 10 mal enthalten, was daher durch Nullen in der Stelle der Zehner bemerkt worden ist; wohl aber sind mehre Einheiten, nämlich 8, in 64 enthalten. Das Produkt 8 . 8 = 64 wird dann gar abgezogen.

§ 26. Aufg. Eine gegebene Zahl durch eine jede andere kleinere zu dividiren.

Aufl. Man vergleiche anfangs den Divisor entweder mit dem aus eben so vielen höchsten Ziffern bestehenden Theile des Dividenden, oder, wenn dieser Theil kleiner als der Divisor ist, nehme man noch eine Ziffer des Dividenden dazu; suche jetzt das Vielfache des Divisors, welches dem verglichenen Theile des Dividenden gleich oder am nächsten kommt, und die höchste Ziffer des Quotienten ist; und ziehe das Produkt dieses ersten Theils des Quotienten in den Divisor von den verglichenen höchsten Stellen des Dividenden ab. Uebrigens verfahre man hier völlig so, wie vorhin (§. 25.).

Um jene Vergleichung anzustellen und das Vielfache des Divisors schneller und leichter zu finden, sucht man nur, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten Ziffer oder, wenn diese kleiner ist, in den beiden höchsten Ziffern des Dividenden enthalten ist, und setzt voraus, der ganze Divisor stecke eben so oft in den ihm zugehörigen Ziffern. Diese Voraussetzung kann falsch sein; denn wenn man das Vielfache des Divisors nimmt, so wird häufig die erste Ziffer desselben durch das, was von den Vielfachen der nachfolgenden Ziffern zu ihr herübergetragen wird, vergrößert; indessen entdeckt sich der Fehler bald dadurch, daß das Vielfache des Divisors von dem verglichenen Theil des Dividenden nicht abgezogen werden kann. Alsdann muß man den gefundenen Theil des Quotienten so lange vermindern, bis der Abzug statt findet. — Umgekehrt, wenn irgend ein Rest größer als der Divisor ist, so ist der Quotient zu klein genommen worden; also muß er vergrößert werden.

Wenn übrigens die heruntergenommene Ziffer des Dividenden noch keine Zahl gibt, welche gleichgroß oder größer als der damit zu vergleichende Divisor ist: so gebe man dem Quotienten eine Null für die zugehörige Stelle, und bringe dann eine neue Ziffer des Dividenden herunter;

wiederhole dieses so lange, bis man auf eine solche Zahl kommt. Beispiel:

abgekürzt	vollständig	
167|535068 (3204	167|535068	(3000
|501	|501000	200
340	34068	00
334	33400	4
668	668	3204
668	668	
*	*	

§. 27. Kommen im Divisor und im Dividenden am Ende Nullen vor, so kann man gegen jede Null des Divisors eine Null des Dividenden wegstreichen, und alsdann dividirt man die beiden solchergestalt verkleinerten Zahlen nach den gewöhnlichen Regeln. Z. B.

2048Ø|1253376000Ø(612000
12288
2457
2048
4096
4096
000

§. 28. Wenn am Ende der Division ein Rest bleibt, so enthält der Dividend den Divisor ein oder mehrmal ganz, und noch etwas von ihm darüber, welches keinen ganzen Divisor beträgt. Es wird ein Bruch (§. 3.) sein, wovon im folgenden Kapitel wird gehandelt werden. Beispiel:

32|180567(5642
160
205
192
136
128
87
64
23 Rest.

§. 29. Die Multiplikation und Division dienen einander wechselseitig als Probe. Denn da bei der Multiplikation der eine Faktor in dem Produkt so oft enthalten ist als der andere Faktor anzeigt, so darf man nur, um die Multiplikation zu prüfen, das gefundene Produkt durch einen der beiden Faktoren dividiren; und der Quotient wird den andern Faktor geben.

Will man die Division prüfen, so multiplicire man den Divisor mit dem gefundenen Quotienten und addire zu diesem Produkt den etwa gebliebenen Rest, und man wird wieder den Dividenden erhalten. Denn der Quotient sagt aus, wie oft der Divisor in dem Dividenden enthalten ist.

Drittes Kapitel.

Von den gemeinen Brüchen.

§. 30. Ein Ganzes kann man sich in mehre gleiche Theile getheilt denken. Eine Zahl nun, welche einen oder mehre solcher gleicher Theile ausdrückt, heißt eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Das Ganze, worauf sich diese Theile beziehen, kann man die Grundeinheit nennen. Zur vollständigen Bezeichnung eines Bruches braucht man zwei Zahlen: die eine, welche angibt, in wieviel gleiche Theile das Ganze oder die Grundeinheit getheilt ist, heißt der Nenner; die andere, welche anzeigt, wieviele solcher Theile genommen sind, heißt der Zähler. Man schreibt beide Zahlen unter einander, so daß der Zähler oben, der Nenner unten zu stehen kommt, und zwischen ihnen wird ein Querstrich gezogen. Z. B. Wenn ein Ganzes in 4 gleiche Theile getheilt und 3 davon genommen werden, so schreibt man $\frac{3}{4}$ und liest es: Drei Viertel.

Man theilt die Brüche in ächte und in unächte. Erstere sind solche, welche kleiner als die Einheit sind oder deren Zähler kleiner als der Nenner ist, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{9}$. Letztere sind solche, bei welchen der Zähler größer als der Nenner ist und dieser in jenem nicht aufgeht, z. B. $\frac{7}{4}$, $\frac{13}{6}$. Dagegen wird ein Bruch ein uneigentlicher genannt, wenn dessen Zähler dem Nenner gleich oder größer als der Nenner ist, und dieser in jenem aufgeht, z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{18}{3}$.

§. 31 Jeder Bruch läßt sich zugleich auch als ein Quotient betrachten, dessen Dividend der Zähler und dessen Divisor der Nenner des Bruches ist. Denn z. B. bei $\frac{5}{8}$ kann ich auch untersuchen, wie vielmal 8 (der Divisor) in 5 (im Dividenden) steckt. Offenbar aber steckt 8 auch nicht ein einzigmal in 5; vielmehr sind von den in 8 enthaltenen 8 Theilen nur 5 ein einzigmal in 5 enthalten d. h. die Zahl 8 steckt in 5 nur $\frac{5}{8}$ mal (Quotient). Darum haben auch die Brüche und die Quotienten ganz einerlei Bezeichnung.

§. 32. Der Rest, der am Ende einer Division übrig bleibt, ist daher der Zähler eines Bruches, dessen Nenner der Divisor ist. Dieser Bruch muß also noch zum Quotienten hinzugefügt werden, um diesen vollständig zu erhalten. In obigem Beispiel der Division (§. 28.) ist folglich der vollständige Quotient $5642\frac{23}{32}$.

§. 33. Darum findet man den Werth eines unächten und uneigentlichen Bruches in ganzen Einheiten, wenn man den Zähler durch den Nenner wirklich dividirt z. B. $\frac{5}{5} = 1$ Ganzes, $\frac{18}{3} = 6$ Ganze, $\frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$ d. h. 5 Ganze und drei Viertel.

§. 34. Wenn man eines Bruches Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt, den Nenner aber ungeändert läßt: so wird der Bruch so vielmal größer, so viele Einheiten jene Zahl enthält. Denn dadurch ändert sich die Beschaffenheit der Theile nicht, sondern nur die Menge derselben,

und die Größe des Bruches wächset mit der Menge der Theile.

Wird aber der Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt, und der Zähler unverändert gelassen: so wird der Bruch so vielmal kleiner, so viele Einheiten die ganze Zahl hat. Denn durch die Multiplikation des Nenners ändert sich die Beschaffenheit der Theile, welche kleiner werden, wenn der Nenner größer wird, und zwar um sovielmal kleiner, als die Zahl anzeigt, mit welcher man den Nenner multiplicirt. Da man nun der kleinern Theile nicht mehr nimmt, als vorher der größern: so wird der Bruch so vielmal kleiner, als die Theile kleiner geworden sind, d. h. als der Nenner größer geworden ist.

§. 35. Hieraus folgt: Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl multiplicirt: so ändert sich nicht der Werth oder die Größe des Bruchs, sondern blos seine Form. Denn die Multiplikation in den Zähler vergrößert den Bruch so vielmal, als die Multiplikation in den Nenner den vergrößerten wieder verkleinert.

§. 36. Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird, der Nenner aber ungeändert bleibt: so wird der Bruch so vielmal kleiner, als der Zähler kleiner geworden ist. Denn durch die Division des Zählers wird die Anzahl der Theile verkleinert, die Beschaffenheit derselben hingegen bleibt unverändert.

Wird aber bei unverändertem Zähler der Nenner eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt: so wird der Bruch so vielmal größer, als der Nenner kleiner geworden ist. Denn durch die Verkleinerung des Nenners werden die Theile der Grundeinheit größer, und von diesen größern Theilen werden noch eben so viele, wie vorhin, genommen.

§. 37. Hieraus folgt: Ein Bruch bleibt in seinem Werthe unverändert, wenn Zähler und Nenner zugleich mit

einerlei Zahl dividirt werden. Denn durch die erste Division wird der Bruch so vielmal verkleinert, als er durch die andere wieder vergrößert wird.

§. 38. Jede ganze Zahl läßt sich in einen Bruch von einem beliebigen Nenner verwandeln, dessen Zähler den Nenner so vielmal enthält, so viele Einheiten in der ganzen Zahl stecken. Denn jede ganze Zahl läßt sich als ein Bruch betrachten, dessen Nenner $= 1$ ist, z. B. $5 = \frac{5}{1}$; $12 = \frac{12}{1}$ u. s. w. Man darf daher nur Zähler und Nenner mit derjenigen Zahl multipliciren, welche den neuen Nenner anzeigt. Z. B. $7 = \frac{7}{1} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 6} = \frac{42}{6}$; eben so $2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{8}{4}$. Und der Bruch oder die anfänglich gegebene Zahl bleibt (wegen §. 35.) dem Werthe nach ungeändert.

§. 39. Einen Bruch aufheben heißt: ihn seiner Größe oder seines Werthes unbeschadet durch einen kleinern Zähler und Nenner ausdrücken.

Durch das Heben der Brüche kann nicht nur wegen der kleinern Zahlen die Rechnung vereinfacht und erleichtert werden, sondern durch dasselbe erhält man auch deutlichere Begriffe von dem Werthe oder der Größe der Brüche, z. B. $\frac{1}{2}$ Loth ist leichter zu verstehen als $\frac{16}{32}$ Loth, obgleich beide Brüche einerlei Werth haben. Indessen können nicht alle Brüche gehoben werden, sondern nur diejenigen, welche einen gemeinschaftlichen Divisor haben.

§. 40. Eine Zahl, welche in eine andere Zahl, ohne daß ein Rest bleibt, dividirt werden kann, heißt das Maaß dieser Zahl. Eine Zahl, welche in verschiedenen andern Zahlen zugleich aufgeht, heißt das gemeinschaftliche Maaß oder der gemeinschaftliche Theiler aller dieser Zahlen.

Zahlen, welche durch kein anderes Maaß als durch sich selbst und durch die Einheit gemessen werden können,

heißen einfache Zahlen, Primzahlen oder Grundzahlen, z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. s. w. Mehre Zahlen aber, welche unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, heißen Primzahlen unter sich z. B. 9, 4, 25 u. s. w.

Zahlen, welche ein Maaß haben, heißen vielfache oder zusammengesetzte Zahlen, z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 18 u. s. w. Wenn aber zwei oder mehre Zahlen so beschaffen sind, daß sie ein gemeinschaftliches Maaß besitzen, so nennt man sie zusammengesetzte Zahlen unter sich. Das gemeinschaftliche Maaß, durch dessen Division die zusammengesetzten Zahlen unter sich zu Primzahlen unter sich werden, heißt das größte gemeinschaftliche Maaß oder der größte gemeinschaftliche Theiler jener Zahlen.

§. 41. Aufg. Das größte gemeinschaftliche Maaß oder den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden.

Aufl. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, und wenn die Division nicht aufgeht, mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor, und so fort; immer mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor, bis man auf eine Division kommt, welche entweder gar keinen Rest oder 1 d. h. die Einheit zum Rest gibt.

Der letztere Fall zeigt an, daß die gegebenen Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben.

Wenn aber die Division ohne allen Rest aufgehet, so wird der bei ihr gebrauchte letzte Divisor das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß der gegebenen Zahlen sein.

Beispiele: 1) Man soll für die Zahlen 1260 und 2016 das größte gemeinschaftliche Maaß suchen:

```
1260|2016|1
     1260
     ----
      756|1260|1
           756
           ---
           504|756|1
               504
               ---
               252|504|2
                   504
                   ---
                    *
```

der letzte Divisor 252 ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß von 1260 und 2016, welches in beide Zahlen ohne Rest aufgehen wird.

2) Das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 37 und 6513 zu finden:

```
37|6513|176
   37
   ---
   281
   259
   ---
    223
    222
    ---
      1
```

Da hier die Division 1 zum Rest gibt, so haben beide gegebene Zahlen kein gemeinschaftliches größtes Maaß.

Der Grund des vorgeschriebenen Verfahrens liegt darin, daß, wenn eine Zahl in einer andern aufgeht, sie nicht nur in jedem Produkt derselben aufgeht, sondern auch in jeder Zahl, die aus einem solchen Produkt und der Zahl, mit welcher man dividirt, zusammengesetzt ist. Wenn im ersten Beispiele 252 in 504 aufgeht, so geht es auch in $504 + 252 = 756$; in $252 . 5 = 1260$; und in $252 . 8 = 2016$ auf; ferner in $756 + 504 = 1260$ und in $1260 + 756 = 2016$.

§. 42. Aufg. Einen gegebenen Bruch aufzuheben.

Aufl. Man suche für Zähler und Nenner den größten gemeinschaftlichen Theiler und dividire beide damit. Der

Quotient beim Zähler gibt den neuen Zähler; der Quotient beim Nenner gibt den neuen Nenner. Auch wird durch ein solches Verfahren der Werth des Bruches nicht im mindesten verändert (vermöge §. 37.) Findet man keinen gemeinschaftlichen Theiler, so beweiset dieses, daß sich der gegebene Bruch nicht heben läßt.

Beispiel: Man soll den Bruch $\frac{1617}{4620}$ heben. Man wird das größte gemeinschaftliche Maaß 231 finden; da nun 1617 : 231 = 7 und 4620 : 231 = 20, so ist der neue Bruch $\frac{7}{20}$. Man schreibt dieß also:

$$\overset{231}{\frac{1617}{4620}\Big|\frac{7}{20}}$$

Man kann auch so verfahren, daß man kleine schickliche, gemeinschaftliche Theiler nimmt, und mit diesen so lange dividirt, bis Zähler und Nenner Primzahlen sind. Das Produkt dieser kleinern Theiler wird dann dem größten gemeinschaftlichen Theiler oder Maaß gleich sein. So kann man in dem letzten Beispiele, anstatt auf einmal mit 231 zu dividiren, nach und nach durch 3, 7, 11 dividiren. Dieser drei Zahlen Produkt gibt aber wieder die Zahl 231. Das Beispiel sieht dann also aus:

$$\frac{1617}{4620}\overset{3}{\Big|}\frac{539}{1540}\overset{7}{\Big|}\frac{77}{220}\overset{11}{\Big|}\frac{7}{20}$$

§. 43. Brüche, welche verschiedene Nenner haben, in gleichgeltende von einerlei Nenner verwandeln heißt: *sie unter einerlei Benennung bringen.*

§. 44. Aufg. Brüche von verschiedenen Nennern unter einerlei Benennung zu bringen.

Aufl. Man multiplicire den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit den Nennern aller übrigen Brüche: so wird man dadurch andere den gegebenen gleiche Brüche erhalten (§. 35.), welche das Produkt aus allen Nennern zu ihrem gemeinschaftlichen Nenner haben werden. Z. B.

$$\frac{2}{5} = \frac{2.4.7}{5.4.7} = \frac{56}{140}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3.5.7}{4.5.7} = \frac{105}{140}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5.5.4}{7.5.4} = \frac{100}{140}$$

Bei diesem Verfahren entsteht bei großen und vielen Nennern ein sehr großer gemeinschaftlicher Nenner; es läßt sich aber oft ein kleinerer finden, den man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner nennt. Es ist nämlich schon genug, wenn jeder einzelne Nenner in dem gemeinschaftlichen auch nur einmal als Faktor vorkommt; und jeder kleinere Nenner, der in einem größern steckt, braucht deßhalb ebenfalls nicht besonders als Faktor in dem gemeinschaftlichen Nenner vorzukommen. Um nun den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner sicher zu finden, zerfälle man einen jeden gegebenen Nenner in seine kleinsten Faktoren, und füge dann den Faktoren eines jeden Nenners diejenigen aus den Faktoren der andern Nenner hinzu, die ihm selbst noch fehlen. Und damit kein Bruch etwas an seinem Werthe verliere, muß man den Zähler eines jeden Bruchs mit eben den Zahlen multipliciren, mit welchen man den Nenner multiplicirt. Ein Beispiel wird die Sache anschaulich und deutlich machen. Man soll folgende Brüche unter einerlei Benennung bringen: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{15}$. Es ist $4 = 2.2$; $6 = 2.3$; $8 = 2.2.2$ und $15 = 3.5$. Demnach

$$\frac{1}{4} = \frac{1.3.2.5}{2.2.3.2.5} = \frac{30}{120}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5.2.2.5}{2.3.2.2.5} = \frac{100}{120}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3.3.5}{2.2.2.3.5} = \frac{45}{120}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2.2.2.2}{3.5.2.2.2} = \frac{16}{120}$$

Nach der allgemeinen Regel wäre der gemeinschaftliche Nenner $= 4.6.8.15 = 2880$.

Ein anderes Verfahren ist folgendes: Man streiche die Nenner, die in einem größern oder höhern ganz enthalten sind, weg; dividire die übrigen, wenigstens zu zwei und zwei, durch einen gemeinschaftlichen Theiler, und schreibe sowohl diesen Theiler, der unverändert bleiben muß, als auch die erhaltenen Quotienten statt der dividirten Zahlen hin. Die Quotienten aber dürfen unter sich und mit den gegebenen Divisoren, wo es angeht, verkleinert werden. Endlich multiplicire man sowohl die übriggelassenen Divisoren, als auch die Quotienten durch einander. Das Produkt gibt den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. In denselben dividire man mit dem Nenner eines jeden Bruchs, und mit seinem Zähler multiplicire man den dadurch gewonnenen Quotienten. Dieses Produkt gibt den jedem Bruche zugehörigen neuen Zähler. Das vorige Beispiel wird nach diesem Verfahren also berechnet: Die Nenner sind:

$$\begin{array}{rcccc} & \not{4} & \not{6} & \not{8} & \not{15} \\ 3) & & \not{2} & 4 & 5 \\ 2) & & 1 & & \end{array}$$

Das Produkt dieser Divisoren und Quotienten ist

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

als der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Man kann dann vollends also fortfahren

	120		folglich
$\frac{1}{4}$	30	30	$\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$
$\frac{5}{6}$	20	100	$\frac{5}{6} = \frac{100}{120}$
$\frac{3}{8}$	15	45	$\frac{3}{8} = \frac{45}{120}$
$\frac{2}{15}$	8	16	$\frac{2}{15} = \frac{16}{120}$

wie vorhin.

§. 45. Nicht immer können die Nenner in Faktoren zerlegt werden, wenn sie nämlich Primzahlen sind. Für diesen Fall gibt es keinen kleinsten gemeinschaftlichen Nen=

ner. Man verfährt dann, wie gleich am Anfang des vorigen §. 44. ist gelehrt worden.

§. 46. Aufg. Zu untersuchen, ob gegebene Brüche einander gleich sind, oder nicht.

Aufl. Man bringe die gegebenen Brüche zuerst unter einerlei Benennung, und dann vergleiche man ihre Zähler. Derjenige, welcher den größern Zähler hat, ist auch der größere; der andere ist der kleinere. Denn wer bei gleicher Eintheilung mehre Theile zählt, ist der größere. Z. B. $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$. Es ist nun

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$$

also ist $\frac{3}{5}$ mehr oder größer als $\frac{4}{7}$.

§. 47. Gemischte Zahlen nennt man solche, welche aus ganzen Zahlen und Brüchen zusammengesetzt sind. Z. B. $12\frac{5}{3}$, $8\frac{1}{6}$.

§. 48. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen zu addiren.

Aufl. 1. Nur Gleichartiges kann addirt werden. Wenn daher die Brüche ungleiche Nenner haben, so bringe man sie zuerst unter einerlei Benennung. Alsdann zähle man ihre Zähler zusammen und gebe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner. Zeigt sich in der Summe ein unächter oder uneigentlicher Bruch, so kann man die Ganzen herausziehen. Der Grund des Verfahrens leuchtet ein. Denn Brüche mit gleichen Nennern sind als Größen von einerlei Art zu betrachten, deren Menge d. h. deren sämmtliche Zähler man wissen will.

2. Bei gemischten Zahlen addire man zuerst die gegebenen Brüche, wie vorhin (Nr. 1.); alsdann die gegebenen ganzen Zahlen, und zähle zu diesen die ganzen Ein-

heiten, welche in der Summe der Brüche etwa enthalten sind. Beispiele:

$$\begin{array}{l}\frac{3}{8} = \frac{63}{168}\\[4pt] \frac{5}{12} = \frac{70}{168}\\[4pt] \frac{2}{3} = \frac{112}{168}\\[4pt] \frac{2}{7} = \frac{48}{168}\\ \hline \frac{293}{168} = 1\frac{125}{168}\end{array} \qquad \begin{array}{r}4\frac{1}{8}\\ 7\frac{1}{2}\\ 10\frac{3}{4}\\ 8\frac{1}{2}\\ \hline 30\frac{7}{8}\end{array}$$

§. 49. Um eine gemischte Zahl in einen ihr gleichen Bruch zu verwandeln, multiplicire man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, addire zum Produkte den Zähler dieses Bruches und schreibe den vorigen Nenner des Bruches als Nenner darunter, z. B. $6\frac{2}{7} = \frac{6 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{44}{7}$; eben so $1\frac{13}{24} = \frac{1 \cdot 24 + 13}{24} = \frac{37}{24}$.

§. 50. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen von einander abzuziehen.

Aufl. 1. Man sorge zuerst dafür, daß die Brüche einerlei Nenner haben. Alsdann ziehe man die Zähler der Brüche von einander ab, und schreibe unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner. Denn dadurch werden Größen, deren Grundeinheit einerlei Eintheilung hat, von einander abgezogen. Z. B. von $\frac{11}{12}$ sollen $\frac{5}{12}$ abgezogen werden:

$$\begin{array}{l}\frac{11}{12}\\[4pt] \frac{5}{12}\\ \hline \text{Rest } \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\end{array} \qquad \text{Eben so} \qquad \begin{array}{l}\frac{7}{9} = \frac{91}{117}\\[4pt] \frac{8}{13} = \frac{72}{117}\\ \hline \text{Rest } \frac{19}{117}\end{array}$$

2. Bei gemischten Zahlen ziehe man zuerst die Brüche von einander ab, wie vorhin (Nr. 1.); alsdann die ganzen Zahlen. Sollte sich der eine Bruch von dem andern

nicht abziehen lassen: so borge man von den ganzen Zahlen eine Einheit. Diese gibt einen Bruch von gleichem Zähler und Nenner, weil $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$ u. s. w. Man muß aber den Nenner dem gemeinschaftlichen Nenner der abzuziehenden Brüche gleich machen. Z. B.

1) $18\frac{4}{5} = 18\frac{32}{40}$	2) $36\frac{1}{7} = 36\frac{3}{21}$
$7\frac{3}{8} = 7\frac{15}{40}$	$19\frac{2}{3} = 19\frac{14}{21}$
Rest $11\frac{17}{40}$	Rest $16\frac{10}{21}$

§. 51. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen mit einander zu multipliciren.

Aufl. 1. Wenn ein Bruch mit einem Bruche zu multipliciren ist, so multiplicire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Das erste Produkt gibt den neuen Zähler, das andere den neuen Nenner. Z. B.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} \text{ oder } \frac{3}{10}.$$

Nämlich $\frac{2}{5}$ soll hier nicht 3mal ganz, sondern blos mit dem vierten Theil davon genommen werden d. h. $\frac{2}{5}$ soll 3mal genommen, aber dann mit 4 dividirt werden. Das Erstere geschieht (vermöge §. 34.), indem man den Zähler (hier 2) durch 3 multiplicirt; das Andere (ebenfalls vermöge §. 34.), wenn man den Nenner (hier 5) durch 4 multiplicirt. Hieraus erhellet der Grund des Verfahrens, der an jedem andern Beispiel auf gleiche Weise nachgewiesen werden kann.

Eben so kann man auch drei und mehre Brüche mit einander multipliciren, z. B. $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{15}{84}$.

2. Ist der eine Faktor eine ganze Zahl, der andere ein Bruch: so multiplicire man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches, und lasse den Nenner ungeändert. Der Grund davon erhellet aus §. 34.; oder man schreibe die ganze Zahl als einen Bruch, indem man ihr 1 zum Nenner gibt, und verfahre wie vorhin (Nr. 1.) Z. B.

$$7 \cdot \frac{5}{13} = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$$

oder $\frac{7}{1} \cdot \frac{5}{13} = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$.

Eben so $\frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{36}{8} = 4\frac{4}{8} = 4\frac{1}{2}$

3. Wenn gemischte Zahlen vorkommen: so verwandele man sie in Brüche (§. 49.) und verfahre dann nach den vorhergehenden Regeln. Z. B.

$$6\frac{2}{5} \cdot 4\frac{1}{3} = \frac{32}{5} \cdot \frac{13}{3} = \frac{416}{15} = 27\frac{11}{15}$$

$$1\frac{7}{8} \cdot 10 = \frac{15}{8} \cdot 10 = \frac{150}{8} = 18\frac{3}{4}$$

§. 52. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen durch einander zu dividiren.

Aufl. 1. Wenn ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll: so multiplicire man den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors. Das erste Produkt gibt den neuen Zähler; das andere den neuen Nenner; oder kürzer: Man kehre den Divisor um, und multiplicire mit dem umgekehrten Bruch nach obigen Regeln der Multiplikation. Z. B.

$$\frac{6}{7} : \frac{3}{8} = \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{3} = \frac{48}{21} = 2\frac{2}{7}.$$

Denn mit $\frac{3}{8}$ dividiren heißt mit dem achten Theil von 3 dividiren. Wenn man daher durch 3 dividirt — welches geschieht, indem man den Nenner von $\frac{6}{7}$ mit 3 multiplicirt, §. 34. — so ist der Quotient (hier $\frac{6}{7 \cdot 3}$) 8 mal zu klein und muß daher erst noch mit 8 multiplicirt werden; daher ist der vollständige Quotient hier $\frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 3}$ d. i. $\frac{48}{21}$ $= 2\frac{2}{7}$. Hieraus erhellet die Richtigkeit der voranstehenden Regel.

2. Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden: so lasse man den Zähler unverändert, und multipli-

cire den Nenner mit der ganzen Zahl. Den Grund des Verfahrens gibt, §. 34. an: oder man schreibe die ganze Zahl als einen Bruch, indem man ihr 1 zum Nenner gibt, und verfahre wie vorhin Nr. 1. Z. B.

$$\frac{6}{11} : 5 = \frac{6}{11 \cdot 5} = \frac{6}{55}$$

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9} : \frac{4}{1} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

3. Wenn eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren ist, so tritt der erste Fall wieder ein: welches auch erhellet, wenn man die ganze Zahl als einen Bruch schreibt, dessen Nenner 1 ist. Z. B.

$$12 : \frac{2}{3} = \frac{12 \cdot 3}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

oder $12 : \frac{2}{3} = \frac{12}{1} : \frac{2}{3} = \frac{12}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{36}{2} = 18.$

4. Kommen gemischte Zahlen vor: so verwandele man sie in Brüche und verfahre dann nach den vorigen Regeln der Division. Z. B.

$$2\frac{1}{4} : 7 = \frac{9}{4} : 7 = \frac{9}{28}$$

$$16 : 8\frac{1}{2} = 16 : \frac{17}{2} = \frac{32}{17} = 1\frac{15}{17}$$

$$3\frac{1}{8} : 4\frac{2}{5} = \frac{25}{8} : \frac{22}{5} = \frac{125}{176}$$

§. 53. Brüche, deren Zähler oder Nenner, oder beide zugleich Brüche sind, heißen **Bruchsbrüche**, z. B.

$$\frac{1\frac{3}{4}}{6} \text{ oder } \frac{\frac{7}{4}}{6};\ \frac{9}{8\frac{2}{3}} \text{ oder } \frac{9}{\frac{26}{3}};\ \frac{2\frac{2}{3}}{5\frac{1}{8}} \text{ oder } \frac{\frac{7}{3}}{\frac{41}{8}}.$$

Solche Brüche können auch in ganz gewöhnlichen Rechnungen vorkommen; so hört man ja oft z. B. von einem halb Viertel $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, halb Achtel $\frac{\frac{1}{2}}{8}$ u. s. w. Man sieht aber von selbst, daß sie keine besondere Behandlung erfordern.

So ist $\frac{\frac{7}{4}}{6} = \frac{7}{4} : 6 = \frac{7}{24}$; eben so $\frac{9}{\frac{26}{3}} = 9 : \frac{26}{3} = \frac{27}{26} = 1\frac{1}{26}$; ferner $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{41}{8}} = \frac{7}{3} : \frac{41}{8} = \frac{56}{123}$.

Viertes Kapitel.

Von den Decimalbrüchen.

§. 54. Brüche, deren Nenner die Zahl 10 oder ein Produkt aus der Zahl 10 mit sich selbst ist, heißen Decimalbrüche. Z. B. $\frac{6}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{14}{1000}$, $\frac{3278}{10000}$, u. s. w.

§. 55. Die Decimalbrüche gewähren manche Vortheile. Denn weil der Nenner leicht kenntlich ist, so kann man ihn ganz weglassen und durch ein Komma andeuten, indem man im Zähler von der Rechten gegen die Linke durch das Komma so viele Ziffern abschneidet, so viele Nullen der Nenner hat. Enthält der Zähler weniger Ziffern als der Nenner Nullen hat: so werden ihm noch so viele Nullen vorgesetzt, als er braucht, um eben so viele Ziffern zu haben, als im Nenner Nullen sind. Sind keine ganzen Zahlen vorhanden, so wird vor das Komma eine Null gesetzt; wenn aber dergleichen sich vorfinden, so werden sie an die Stelle der Null vor dem Komma geschrieben. Z. B. $\frac{6}{10} = 0{,}6$; $\frac{5}{100} = 0{,}05$; $\frac{14}{1000} = 0{,}014$; $\frac{3278}{10000} = 0{,}3278$; $15\frac{7}{1000} = 15{,}007$; $8\frac{17}{100} = 8{,}17$.

Aus dieser Art, die Decimalbrüche zu schreiben, wird auch das schon gelehrte Gesetz unsers Zahlensystems wieder sichtbar, nach welchem die Ziffern von der Linken zur Rechten immer einen zehnfach geringern Werth erhalten. In der ersten Stelle nach dem Komma d. h. nach den Einern

stehen die Zehntel, in der zweiten stehen die Hundertel, in der dritten die Tausendtel u. s. w. Hält man dieses Gesetz fest im Auge, so wird man ohne Schwierigkeit vorgelegte Decimalbrüche aussprechen, und vorgesagte niederschreiben können. Denn auch hier wird, wie bei ganzen Zahlen, diejenige Ordnung, welche fehlt, durch eine Null ersetzt. Z. B. $\frac{706}{1000}$ = 0,706 sind 7 Zehntel, kein Hundertel und 6 Tausendtel oder kürzer: 706 Tausendtel.

Ein anderer Vortheil, der aus der Schreibart entspringt, ist der, daß die Decimalbrüche sich in den verschiedenen Rechnungen nach denselben Regeln behandeln lassen, wie die ganzen Zahlen.

§. 56. Man kann einem Decimalbruche so viele Nullen zur Rechten oder am Ende anhängen, als man nur will, ohne dadurch seinen Werth zu ändern; denn dieser hängt von den Stellen seiner bedeutenden Ziffern ab, und diese werden durch die Stelle des Komma bestimmt. Es ist also 0,3 = 0,30 = 0,300 = 0,3000 u. s. w.

Umgekehrt kann man die am Ende befindlichen Nullen eines Decimalbruches, seines Werthes unbeschadet, wegstreichen, und es ist 2,450000 = 2,45000 = 2,4500 = 2,450 = 2,45.

§. 57. Aufg. Decimalbrüche zu addiren.

Aufl. Man setze die Decimalen von gleicher Ordnung unter einander, nämlich Zehntel unter Zehntel, Hunderttel unter Hunderttel, Tausendtel unter Tausendtel u. s. w. Alsdann zähle man die unter einander stehenden Zahlen wie ganze Zahlen zusammen, rechne jedesmal den Zehner, der in der Summe einer Reihe heraus kömmt, zur folgenden Reihe und setze in der Summe das Komma, wodurch die Decimalen abgeschnitten werden, unter die Kommata der summirenden Zahlen. Denn auf diese Weise erhält man alle Zehntel, Hundertel u. s. w., die in den summirenden Zahlen enthalten sind. Z. B.

14,385	0,875
0,4003	0,062
0,5	0,33
326,0078	0,4754
8,033	0,108
349,3261	1,8504

§. 58. Aufg. Decimalbrüche von einander abzuziehen.

Aufl. Man schreibe die Zahlen so unter einander, wie bei der Addition der Decimalbrüche (§. 57.), und wenn sie eine ungleiche Anzahl von Decimalstellen haben, so hänge man (vermöge §. 56.) demjenigen, der weniger hat, so viele Nullen an, als ihm abgeben. Alsdann verrichte man die Subtraktion wie bei ganzen Zahlen, und setze das Komma in dem Reste unter die Kommata des Minuenden und Subtrahenden. Die Richtigkeit des Verfahrens wird einem Jeden von selbst einleuchten. Beispiele:

0,87352	36,04500
0,32881	8,12634
0,54471	27,91866
3,476802	12,0875
0,8039	11,637642
2,672902	0,449858

§. 59. Aufg. Decimalbrüche mit einander zu multipliciren.

Aufl. Man schreibe die Faktoren, wie beim Multipliciren ganzer Zahlen, unter einander, ohne auf die Kommata Rücksicht zu nehmen, und verrichte nun die Multiplication wie mit ganzen Zahlen. In dem Hauptprodukte schneide man so viele Decimalstellen ab, so viele beide Faktoren zusammen genommen haben.

Enthält das Produkt nicht so viele Ziffern, als nöthig sind, um die gehörige Anzahl von Decimalstellen abschneiden zu können: so setze man demselben so viele Nullen vor, daß das Verlangte geschehen kann. Z. B.

```
 0,38406          76,103
 0,23               442
 -------          --------
 115218           152206
 76812           304412
 ---------       304412
 0,0883338       ---------
                 33637,526

 0,000718         8,00005
       23           0,029
 --------         --------
     2154         7200045
    1436          1600010
 --------         ----------
 0,016514         0,23200145
```

Den Grund dieses Verfahrens erkennt man leicht, wenn man die Decimalbrüche wie gewöhnliche schreibt und behandelt.

§. 60. Aufg. Decimalbrüche durcheinander zu dividiren.

Aufl. Ohne Rücksicht auf die Kommata zu nehmen, dividire man die Decimalbrüche wie ganze Zahlen, und schneide im Quotienten so viele Decimalstellen ab, um wie viel die Anzahl der Decimalen des Dividenden größer ist, als die Anzahl der Decimalen des Divisors.

Hat der Divisor mehr Decimalen als der Dividend, so hänge man letzterem zur Rechten so viele Nullen an, daß er zum wenigsten soviele Decimalen hat als der Divisor.

Wenn der Divisor und Dividend gleichviele Decimalstellen haben, so wird der Quotient eine ganze Zahl.

Beispiele:

```
2,44|83,2528(34,12        48|98,784(2,058
     732                     96
     ----                    ---
     1005                     278
      976                     240
     ----                     ---
       292                     384
       244                     384
       ---                     ---
        488                     *
        488
        ---
         *
```

```
0,0036|59,4(16500        1,12|311,36(278
  36                          224
  234                         873
  216                         784
   18000                      896
   180                        896
     *                          *
```

Der Grund des Verfahrens leuchtet ein, wenn man die Decimalbrüche als gemeine Brüche schreibt und dann nach den Regeln der Division mit Brüchen verfährt.

§. 61. Wenn ein Rest bleibt, so ist der Quotient nicht vollständig; will man ihn genauer haben, so hänge man dem Reste Nullen an und setze die Division fort. Jede neu angehängte Null gilt für eine neue Decimalstelle des Dividenden, worauf man also bei der Bestimmung der Decimalen im Quotienten Rücksicht nehmen muß. Dieß läßt sich auch anwenden, wo Ganze durch Ganze dividirt werden, wie das zweite Beispiel lehrt. Z. B.

```
18|213,57|11,865          712|30582|42,95....
 18                           2848
  33                           2102
  18                           1424
  155                           6780
  144                           6408
   117                           3720
   108                           3560
     90                           160
     90
      *
```

§. 62. Aufg. Einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Aufl. Man hänge an den Zähler Nullen, dividire denselben durch den gegebenen Nenner und schneide von dem Quotienten so viel Decimalstellen ab, als man Nullen angehängt hat. Man kann übrigens so viel Nullen anhängen, als man will, oder soviel als verlangt werden. Z. B.

$\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$

$\frac{7}{8} = \frac{7,000}{8} = 0,875$

§. 63. Die Division kann mit weniger Decimalstellen, als verlangt werden, aufgehen. In diesem Fall kann man die weiter folgenden Nullen auch weglassen (§. 56.) Z. B. Man soll $\frac{4}{5}$ in einen Decimalbruch von 3 Decimalstellen verwandeln; so ist

$\frac{4}{5} = 0,800 = 0.8.$

§. 64. Dagegen kann es sich treffen, daß die Division bei einer verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht aufgeht, sondern einen Rest übrig läßt. Alsdann stellt der Decimalbruch den gemeinen Bruch nicht ganz dar. Ja es gibt Brüche, die sich nie vollkommen in einen Decimalbruch verwandeln lassen, so viele Nullen man auch dem Zähler anhängt. Solche Brüche nennt man unendliche oder auch periodische Decimalbrüche, und man erkennt sie daran, daß sie entweder immer die nämliche Ziffer wiederholen, oder immer zwei, drei, auch mehre gleiche Ziffern, oder endlich nach einer oder mehren ungleichen Ziffern immer eine Anzahl gleicher Ziffern haben. In einem solchen Falle nimmt man so viele Decimalstellen, daß der noch fehlende Theil als unbedeutend in der Anwendung bei Seite gesetzt werden kann. Man pflegt solche unvollständige Brüche durch einige Punkte zu bezeichnen, die man ihnen am Ende beifügt. Z. B.

$\frac{2}{3} = \frac{2,0000}{3} = 0,6666....$

$\frac{8}{27} = 0,296296....$

$\frac{7}{48} = 0,1458333....$

§. 65. Aufg. Einen Decimalbruch in den ihm gleichen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Aufl. 1. Wenn der Decimalbruch ein vollständiger ist, so schreibe man ihn als einen gemeinen Bruch, und verkleinere ihn alsdann, wenn es möglich ist. Z. B.

$$0,875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$$
$$0,9375 = \frac{9375}{10000} = \frac{15}{16}$$

2. Wenn aber der Decimalbruch ein periodischer ist, so rücke man das Komma um so viele Stellen von der Linken zur Rechten, als die Periode Ziffern enthält, und ziehe den gegebenen Bruch von diesem neuen ab, nachdem man beiden eine gleiche Anzahl Decimalstellen gegeben hat. Der Rest ist der Zähler des zu suchenden gemeinen Bruches, dem man zum Nenner so viele Neuner (9....) gibt, als in der Periode Ziffern enthalten sind. In dieser Gestalt verkleinere man ihn, wenn es angeht, und gebe ihm überhaupt die gehörige Form. Denn wenn z. B. 0,6666.... in den ihm gleichen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden soll und dieser durch x bezeichnet wird, so hat man $x = 0,666...$ und der Fortgang der Rechnung ist dieser:

$$\begin{array}{r} 10.\ x = 6,66... \\ x = 0,66... \\ \hline 9\ x = 6 \\ \text{und } x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{array}$$

Eben so sei $x = 0,481481481....$ so ist

$$\begin{array}{r} 1000\ x = 481,481.... \\ x = 0,481.... \\ \hline 999\ x = 481 \\ \text{und } x = \frac{481}{999} = \frac{13}{27} \end{array}$$

Endlich sei $x = 0,1434343....$ so ist

$$\begin{array}{r} 100\ x = 14,343... \\ x = 0,143... \\ \hline 99\ x = 14,2 \\ \text{und } x = \frac{14,2}{99} = \frac{142}{990} = \frac{71}{495}. \end{array}$$

Fünftes Kapitel.

Von den Kettenbrüchen.

§. 66. Ein Kettenbruch (Stufenbruch) ist ein solcher, in welchem der Nenner selbst noch einen angehängten Bruch hat, der Nenner dieses letztern Bruches wiederum einen Bruch u. s. w. so daß diese Verkettung ohne Ende fortgehen oder irgend wo abbrechen kann. Die Zähler dieser verketteten Brüche sind ganze Zahlen, am gewöhnlichsten aber die Einheit, von welchen letztern hier zunächst die Rede sein wird. Z. B.

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\frac{1}{2}}}}}$$

§. 67. Die Kettenbrüche finden eine mannigfaltige Anwendung. Unter Andern dienen sie dazu, Brüche, welche unbequem in großen Zahlen ausgedrückt sind und sich nicht verkleinern lassen, durch kleinere Ausdrücke, die jenen am Werthe nahe kommen, darzustellen.

§. 68. Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Kettenbruch, dessen sämmtliche Zähler Eins sind, verwandelt, wenn man dessen Zähler und Nenner durch den Zähler dividirt, und damit so lange fortfährt, bis die Division aufgeht. Z. B. der unbequeme Bruch $\frac{53}{290}$ soll in einen Kettenbruch verwandelt werden. Dieß geschieht durch folgendes, eben beschriebenes Verfahren:

53)	$\frac{53}{290}$	$\frac{1}{5}$
	265	
25)	$\frac{25}{53}$	$\frac{1}{2}$
	50	
3)	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{8}$
	24	
1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Es ist also $\frac{53}{290} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{3}}}}$

Eben so wird der Bruch $\frac{593}{1268} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6}}}}}$

durch folgende Rechnung:

593)	$\frac{593}{1268}$ 1186	$\frac{1}{2}$
82)	$\frac{82}{593}$ 574	$\frac{1}{7}$
19)	$\frac{19}{82}$ 76	$\frac{1}{4}$
6)	$\frac{6}{19}$ 18	$\frac{1}{3}$
1)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Auf gleiche Weise findet man:

$$\frac{1000000000\ldots}{3141592653\ldots} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{192+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}$$

§. 69. Ein Kettenbruch wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wenn man den letzten gemischten Nenner auf die gemeine Bruchform bringt, darauf den neuen gemischten Nenner eben so behandelt, und so fortfährt bis zu dem ersten oder obersten partiellen Bruche. Z. B. Man soll den vorigen ersten Kettenbruch in den ihm gleichen gewöhnlichen Bruch verwandeln. Hier ist nun

$$\frac{1}{8+\frac{1}{3}}=\frac{3}{25}\ ;\ \frac{1}{2+\frac{3}{25}}=\frac{25}{53}\ ;\ \frac{1}{5+\frac{25}{53}}=\frac{53}{290}.$$

Bequemer aber, und auf gleichen Grundsätzen beruhend, ist folgendes Verfahren: Man schreibe alle Nenner in vorliegender Ordnung neben einander und ziehe darunter einen Querstrich. Unter demselben setze man, von der Rechten anfangend, zuerst die Zahlen 0 und 1 dergestalt, daß 0 um eine Stelle weiter hinaussteht als die letzte der obern Zahlen und 1 unter die letzte obere zu stehen kommt. Jede folgende Zahl der untern Reihe wird nun so gefunden, daß man die vorhergehende untere Zahl mit der gerade darüber stehenden Zahl der obern Horizontalreihe multiplicirt und zu diesem Produkte die noch weiter in der untern Horizontalreihe vorhergehende oder zur Rechten stehende Zahl addirt. Die beiden am weitesten zur Linken stehenden Zahlen der untern Reihe sind der Zähler und Nenner des zu suchenden Bruches. Das vorige Beispiel sieht darnach so aus:

$$\begin{array}{cccccc} & 5, & 2, & 8, & 3 & \\ \hline 290, & 53, & 25, & 3, & 1, & 0 \end{array}$$

wo die vorletzte Zahl 53 der Zähler und die letzte 290 der Nenner des gesuchten Bruches ist.

§. 70. Um die Näherungswerthe eines Bruches kennen zu lernen, verwandele man denselben in einen Kettenbruch, und hierauf diesen Kettenbruch theilweise in einen gewöhnlichen Bruch, von dem obersten oder ersten anfangend, wo dann der oberste selbst den anfänglichen Bruch am unvollkommensten vorstellt; und je mehre man stufenweise zusammen nimmt, desto mehr nähert man sich dem wahren Werthe des anfänglichen Bruches. Der erste Werth des Kettenbruches ist allemal zu groß, weil sein Nenner zu klein ist; der zweite Werth ist zu klein, weil der Nenner zu groß ist; der dritte ist abermals zu groß und der vierte

zu klein; und so abwechselnd weiter, indem man sich immer mehr dem wahren Werthe des anfänglichen Bruches nähert, bis der letzte Werth den vollständigen Werth desselben wieder gibt. Z. B. Die Näherungswerthe des Bruches $\frac{53}{290}$ sind:

1) $\frac{1}{5}$

2) $\frac{2}{11}$ aus $\frac{5, 2}{11, 2, 1, 0}$

3) $\frac{17}{93}$ aus $\frac{5, 2, 8}{93, 17, 8, 1, 0}$

4) $\frac{53}{290}$ als der anfängliche volle Bruch.

Die Näherungswerthe des Verhältnisses oder Bruches $\frac{1000000 \ldots}{3141592 \ldots}$ sind $\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{106}{333}, \frac{113}{355}$ u. s. w.

Sechstes Kapitel.

Buchstabenrechnung.

§. 71. Die Buchstabenrechnung lehrt, wie die verschiedenen arithmetischen Verrichtungen mit Buchstaben, als Zeichen unbestimmter oder allgemeiner Größen, in bequemen Ausdrücken dargestellt, und welche gleichgeltende Verwandlungen mit diesen Ausdrücken vorgenommen werden können.

§. 72. Da hier die nämlichen Zeichen, wie in der Zifferrechnung, gelten, so wird man leicht folgende Darstellungen verstehen: nämlich

$a + b$ drückt die Summe der Größen a und b aus;

$a - b$ bezeichnet der Größen a und b Unterschied;

$a \times b$ oder $a . b$ oder auch $a b$ (ohne jedes dazwischen stehende Zeichen) bezeichnet das Produkt von a und b;

$a : b$ oder $\frac{a}{b}$ drückt einen Quotienten aus oder verlangt, daß a durch b dividirt werde.

$a = b$ zeigt die Gleichheit der Größen a und b an;

$a > b$ oder $b < a$ sagt, daß a größer als b sei.

§. 73. In den Produkten können mehre gleiche Faktoren vorkommen. Da kann eine Kürze im Schreiben gewonnen werden, indem man oben rechts an dem einen der gleichen Faktoren durch eine Ziffer bemerkt, wie oft er in dem Produkte erscheint; daher wird sein $a . a = a^2$; $aaa = a^3$; $aaaa\,bb = a^4 b^2$ und allgemein bedeutet a^n, daß a in dem Produkte nmal vorkommt.

§. 74. Ausdrücke, welche aus Summen, Unterschieden oder aus beiden zugleich bestehen, wie $a + b$; $a - b$; $a - b + c$ u. s. w., heißen zusammengesetzte Größen.

Wenn arithmetische Verrichtungen mit zusammengesetzten Größen sollen vorgenommen werden, so werden dieselben in Klammern eingeschlossen. Z. B.

$a - (b - c)$ verlangt, daß von der Größe a die ganze Größe $(b - c)$ abgezogen werde;

$(a + b) . (a - c)$ verlangt, daß die ganze Größe $(a + b)$ durch die ganze Größe $(a - c)$ multiplicirt werde;

$(a - b) : (c + d)$ will, daß die ganze Größe $(a - b)$ durch die ganze Größe $(c + d)$ dividirt werde;

$(a + b)^3$ bedeutet, daß die ganze Größe $(a + b)$ dreimal als Faktor gesetzt werde.

§. 75. Die bestimmten Zahlen oder Ziffern vor Buchstaben heißen deren Koefficienten und zeigen an, daß die Größen so oftmal genommen werden sollen, als die Ziffer ausspricht, z. B. 5a heißt, die Größe a soll 5mal genommen werden. Uebrigens bedeutet in ein und derselben Rechnung der nämliche Buchstabe auch stets dieselbe Größe.

§. 76. Größen, welche in einer entgegengesetzten Beziehung zu einander stehen, ein entgegengesetztes Verhalten, oder eine entgegengesetzte Lage gegen einander haben, heißen entgegengesetzte Größen, z. B. Vermögen und Schulden, Steigen und Fallen, Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen, Einnahme und Ausgabe, Gewinn und Verlust. Solche Größen mit einander in Verbindung gebracht und zu einander gesetzt (addirt) vermindern einander und zwar so, daß die kleinere verschwindet, und von der größern nur so viel übrig bleibt, als ihr Ueberschuß beträgt. Und zwei gleichgroße entgegengesetzte Größen heben einander auf oder werden Null.

Eine Größe, unter der einen von zwei entgegengesetzten Beziehungen betrachtet, heißt bejaht, positiv, und erhält das Zeichen + (plus), und unter der andern betrachtet, heißt sie dann verneint, negativ, und bekommt das Zeichen — (minus). Wenn eine bejahte Größe am Anfange steht, so läßt man der Kürze wegen ihr Zeichen (+) weg.

Man wird nun begreifen, daß $12 - 8 = 4$ ist; ferner $7 - 16 = -9$ und endlich $6 - 6 = 0$. Eben so $12a - 8a = 4a$; $7b - 16b = -9b$ und $6a - 6a = 0$.

Andere stellen die Sache auch so vor: Größen, welche einem gewissen, willkührlich gewählten oder als nothwendig gegebenen Ziele entsprechen, sind bejahte, positive. Was sich sodann von diesem Ziele entfernt, ist das Verneinte, Negative.

Addition.

§. 77. Ungleichartige Größen kann man nicht wirklich addiren; sondern sie werden nur mit ihren Zeichen in beliebiger Ordnung neben einander geschrieben. Gleichartige schreibt man unter einander; zählt diejenigen, welche einerlei Zeichen haben, zusammen und bemerkt ihre Summe

mit dem gemeinschaftlichen Zeichen unter dem Querstrich. Gleichartige Größen mit verschiedenen Zeichen zieht man von einander ab, und setzt den Rest mit dem Zeichen der größern Größe unter den Strich. Es leuchtet übrigens ein, daß $a = 1.a$ ist, und daß a, a^3, a^7; eben so ab^2 und a^2b u. d. gl. keine gleichartigen Größen sind.

Beispiel 1.

$$\begin{array}{r}
4a + 9b - 7c + 5d + 8e \\
a - 6b - c - 2d + 4e - 3f \\
\hline
5a + 3b - 8c + 3d + 12e - 3f
\end{array}$$

Beisp. 2.

$$\begin{array}{r}
a - 7b - c + 3bc + 5e^2 - f - 2g \\
3a + 7b - 3c - 6bc + e^2 - k + 4g^3 \\
\hline
4a \quad - 4c - 3bc + 6e^2 - f - 2g - k + 4g^3
\end{array}$$

Beisp. 3.

$$\begin{array}{r}
7ab + 4b + c - 6ac - 4d \\
-2ab + 8b - 3c - ac + 6d - 8e \\
- ab - 5b + 6c + 4ac - 3d \\
4ab - 3b - 8c + 3ac + 2d + 2e \\
\hline
8ab + 4b - 4c \quad + d - 6e
\end{array}$$

Subtraktion.

§. 78. In dem Begriffe der Subtraktion liegt es, daß man zum Subtrahenden diejenige Größe sucht, welche ihn dem Minuenden gleich macht; denn dadurch wird der Unterschied aufgehoben. Dieß geschieht dadurch, daß man das Zeichen des Subtrahenden in das entgegengesetzte verwandelt und dann addirt (nach §. 77.). Z. B.

$$\begin{array}{l}
+12 \\
+8 \\
\hline
+4 = 12 - 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
+12 \\
-8 \\
\hline
+20 = 12 + 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
-12 \\
+8 \\
\hline
-20 = -12 - 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
-12 \\
-8 \\
\hline
-4 = -12 + 8
\end{array}$$

allgemein

$$\frac{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}{a-b}\qquad\frac{\begin{matrix}a\\-b\end{matrix}}{a+b}\qquad\frac{\begin{matrix}-a\\+b\end{matrix}}{-a-b}\qquad\frac{\begin{matrix}-a\\-b\end{matrix}}{-a+b}$$

Man kann sich die Sache auch also begreiflich machen: Von a soll b abgezogen werden. Anstatt a kann man auch, weil $b-b=0$ ist, schreiben $a+b-b$. Nimmt man daraus $+b$ weg, so bleibt $a-b$ wie vorhin. Ferner soll von a die Größe $-b$ abgezogen werden. Man schreibe wiederum $a+b-b$ statt a, und nehme $-b$ weg, so bleibt $a+b$ wie vorhin. Es steht also für die Subtraktion die Regel fest: Man verändere die Zeichen des Subtrahenden in die entgegengesetzten und verrichte dann die Addition.

Beisp. 1.

$$\begin{array}{l}5a-8b-3c^2+4ab-2d\\3a+2b-3c^2-ab\\-\quad-\quad+\quad+\\\hline 2a-10b\qquad+5ab-2d\end{array}$$

Beisp. 2.

$$\begin{array}{l}12a+3bc-8b+3c\\-2a-4bc+b-6c-4d\\\hline 14a+7bc-9b+9c+4d\end{array}$$

Man kann die Größen auch nach einander schreiben. So ist $(a+b)-(a-b)=a+b-a+b=2b$.

Die Buchstabenbrüche unterliegen den nämlichen Regeln, wie die gewöhnlichen Brüche, z. B.

$$\frac{7}{8}a-\frac{2}{5}a=\frac{35}{40}a-\frac{16}{40}a=\frac{19}{40}a$$

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}-\frac{bm}{mn}=\frac{an-bm}{mn}$$

Multiplikation.

§. 79. Bei der Multiplikation werden die Buchstaben als Faktoren neben einander gesetzt, und ihre Koefficienten

wirklich multiplicirt; denn $3a \cdot 4b = 3 \cdot 4ab = 12 \cdot ab$. In Bezug auf die Zeichen ergibt sich aber Folgendes: Wenn zwei bejahte Faktoren zu multipliciren sind, so soll der eine bejahte Faktor bejaht genommen werden — dieß gibt offenbar ein bejahtes Produkt. Soll ein bejahter Faktor durch einen verneinten multiplicirt werden, so soll der bejahte Faktor verneint oder entgegengesetzt genommen werden — welches ein verneintes Produkt gibt; das Nämliche ist es, wenn ein verneinter Faktor durch einen bejahten zu multipliciren ist; denn der verneinte Faktor soll so, wie er ist, nicht entgegengesetzt genommen werden. Sind endlich beide Faktoren verneint, so heißt dieß: der eine verneinte Faktor soll verneint d. h. entgegengesetzt, also bejaht genommen werden — was ein bejahtes Produkt gibt. Aus diesen Betrachtungen geht für die Multiplikation in Bezug auf die Zeichen die Regel hervor: Gleiche Zeichen der Faktoren geben ein bejahtes, und ungleiche ein verneintes Produkt.

Wenn zusammengesetzte d. h. aus mehren Theilen bestehende Faktoren vorkommen, so wird jeder besondere Theil des einen Faktors mit jedem Theile des andern multiplicirt.

Beisp. 1) $7a \cdot 5b = 35ab$

2) $3ab \cdot 8ac = 24a^2bc$

3) $a^2b \cdot 4ab^3c = 4a^3b^4c$

4) $(7a + 5b - 8c) \cdot 4a = 28aa + 20ab - 32ac$

5)
$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad - \quad b^2 \end{array}$$

7) $(x + \frac{1}{2}a) \cdot (x + \frac{1}{2}a) = (x + \frac{1}{2}a)^2 = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$

8) $(\frac{1}{2}d + z) \cdot (\frac{1}{2}d + z) = (\frac{1}{2}d + z)^2 = \frac{1}{4}d^2 + dz + z^2$

9) $(a - \frac{1}{2}d)^2 = a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2$

10) $(12 - a) \cdot (a + 3) \cdot (a - 4) = 13a^2 - a^3 - 144$

11)
$$\begin{array}{l} a^2 - 2ab + 7 \\ a^2 + 2ab \\ \hline a^4 - 2a^3b + 7a^2 \\ \qquad 2a^3b - 4a^2b^2 + 14ab \\ \hline a^4 + 7a^2 - 4a^2b^2 + 14ab \end{array}$$

12) $(2{,}4a - 20b + 7{,}04c) \cdot (0{,}6a + 5b) = 1{,}44a^2 - 4{,}224ac - 100b^2 + 35{,}2bc.$

Buchstabenbrüche werden wie die gewöhnlichen Brüche behandelt. Z. B.

1) $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$; 2) $\frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{a-b}{c-d} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$

Division.

§. 80. In Bezug auf die Zeichen gilt auch hier das Gesetz der Multiplikation, nämlich: Gleiche Zeichen geben einen bejahten, und ungleiche einen verneinten Quotienten. Denn eine bejahte oder verneinte Größe durch eine bejahte dividiren heißt einen Quotienten suchen, welcher mit dem Dividenden einerlei Beziehung hat; und dieselbe durch einen verneinten dividiren bedeutet: einen Quotienten suchen, welcher eine dem Dividenden entgegengesetzte Beziehung hat. Dieß ist der Grund der obigen Regel. Im Uebrigen unterscheide man folgende Fälle:

1) Wenn der Divisor und Dividend verschiedenartig sind, so kann die Division blos angezeigt werden, z. B. $\frac{a}{b}$; $\frac{a-b}{c}$; $\frac{ab+cd}{m+n}$.

2) Wenn der Divisor einfach, der Dividend aber aus mehren Theilen zusammengesetzt ist, so soll jeder Theil des Dividenden durch den Divisor dividirt werden. Da nun $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{a^m}{a^m} = 1$; $\frac{ab}{ab} = 1$ ist, so wird, wenn der

Divisor und Dividend einerlei Buchstaben haben, in beiden eine gleichgroße Anzahl gegenseitig vernichtet und dafür im Zähler 1 gesetzt, welche Eins aber nicht nöthig ist, wenn noch andere Faktoren vorhanden sind. Die Koefficienten werden gleichfalls in einander dividirt. Z. B.

$$\frac{ab - 3ac + af}{a} = b - 3c + f$$

$$\frac{12a^3 - 8a^2b + 4a^5c}{4a^2} = 3a - 2b + a^3c$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2} = 1 - \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{ab - cd}{bc} = \frac{a}{c} - \frac{d}{b}$$

3) Besteht sowohl der Dividend als auch der Divisor aus mehren Theilen oder Gliedern, welche gemeinschaftliche Buchstaben haben: so kann gleichfalls die Division vollzogen werden. Alsdann ordne man die Glieder in beiden nach ihren gemeinschaftlichen Buchstaben (was zwar nicht unumgänglich nothwendig, aber doch vortheilhaft ist), und dividire, wie bei der Zifferdivision, mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden: so erhält man den ersten Theil des Quotienten. Diesen multiplicire man mit allen Gliedern des Divisors und ziehe diese Produkte von dem Dividenden ab. Bleibt ein Rest, so dividire man diesen wie vorhin, und man erhält den zweiten Theil des Quotienten. Auf diese Art verfahre man so lange, bis entweder Alles aufgeht, oder ein Rest bleibt, der sich nicht weiter dividiren läßt. Dieser Rest bildet den Zähler eines Bruches, wovon der Divisor der Nenner ist, und dieser Bruch ist mit dem gehörigen Zeichen noch dem Quotienten beizufügen.

Beispiele.

$$
\begin{array}{l|l}
a+b & ac+bc+ad+bd\ (c+d \\
 & ac+bc \\ \hline
 & \quad ad+bd \\
 & \quad ad+bd \\ \hline
 & \quad *
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a-b-d & aa-bb-2ad+dd\ (a+b-d \\
 & aa-ab-ad \\ \hline
 & ab-bb-ad+dd \\
 & ab-bb-bd \\ \hline
 & -ad+bd+dd \\
 & -ad+bd+dd \\ \hline
 & \quad *
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a^2-2ab+2b^2 & a^4+4b^4 \qquad (a^2+2ab+2b^2 \\
 & a^4-2a^3b+2a^2b^2 \\ \hline
 & 2a^3b-2a^2b^2+4b^4 \\
 & 2a^3b-4a^2b^2+4ab^3 \\ \hline
 & 2a^2b^2-4ab^3+4b^4 \\
 & 2a^2b^2-4ab^3+4b^4 \\ \hline
 & \quad *
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+3x-7 & x^3+8x^2+8x-35\ (x+5 \\
 & x^3+3x^2-7x \\ \hline
 & 5x^2+15x-35 \\
 & 5x^2+15x-35 \\ \hline
 & \quad *
\end{array}
$$

Mit Buchstabenbrüchen dividirt man, wie mit den Brüchen im Allgemeinen, z. B.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{8a^2}{3b} : \frac{4a}{12b^3} = \frac{8a^2}{3b} \times \frac{12b^3}{4a} = 8ab^2$$

§. 81. Wenn die Division nicht aufgeht oder der Dividend durch den Divisor nicht theilbar ist: so kann doch das bisherige Verfahren auch hier angewendet werden, wodurch man den Quotienten in eine *unendliche Reihe* verwandelt, welche dadurch genau bestimmt wird, daß man den Gliedern des Quotienten noch den Bruch beifügt, dessen Zähler der letzte Rest und dessen Nenner der Divisor ist. Z. B. $\frac{x}{a-b}$ oder $x : (a - b)$ sieht also aus

$$
\begin{array}{l|l}
a - b & x \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x}{a^3} + \frac{b^3x}{a^4} + \ldots\ldots \right. \\
 & x - \frac{bx}{a} \\
\hline
 & \frac{bx}{a} \\
 & \frac{bx}{a} - \frac{b^2x}{a^2} \\
\hline
 & \frac{b^2x}{a^2} \\
 & \frac{b^2x}{a^2} - \frac{b^3x}{a} \\
\hline
 & \frac{b^3x}{a^3} \\
 & \frac{b^3x}{a^3} - \frac{b^4x}{a^4} \\
\hline
 & \frac{b^4x}{a^4}
\end{array}
$$

Setzt man hier $x = 1$ und $a = 1$; so wird

$$\frac{1}{1-b} = 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 + \ldots\ldots$$

wo für $b < 1$ die Reihe konvergirt d. h. die Glieder der Reihe ohne Ende abnehmen, so daß der durch den Divisor getheilte letzte Rest wegen seiner Kleinheit wegbleiben kann; aber für $b > 1$ divergirt die Reihe d. h. die folgenden Glieder werden immer größer, in welchem Falle genannter Rest nicht außer Acht gelassen werden darf.

Wenn man wiederum $x = 1$ dagegen $b = 1$ setzt, so wird

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \ldots\ldots$$

welche Reihe für $a > 1$ konvergirt, und für $a < 1$ divergirt.

Wenn man auf gleiche Weise, wie oben, wirklich dividirt, so erhält man

$$\frac{x}{a+b} = \frac{x}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x}{a^3} - \frac{b^3x}{a^4} + \frac{b^4x}{a^5} - \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1-2a+a^2} = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1-a+a^2} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - \ldots\ldots$$

Potenzen und Wurzeln.

§. 82. Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren heißt eine Potenz oder Dignität des Faktors, der in diesem Produkt mehrmals mit sich selbst multiplicirt wird, und zwar die zweite Potenz oder das Quadrat, wenn das Produkt zwei gleiche Faktoren hat; die dritte Potenz oder der Kubus, wenn es aus drei dergleichen besteht, und überhaupt die vierte, fünfte, mte Potenz, wenn das Produkt vier, fünf, m gleiche Faktoren hat. Der Faktor,

welcher mehrmals im Produkte vorkommt, heißt die **Wurzel** der Potenz, und die Zahl, welche die Menge der gleichen Faktoren angibt, wird der **Exponent** genennt, den man oben rechts an die Wurzel schreibt, wie a^5, a^8, a^m. In der ersten Potenz läßt man gewöhnlich den Exponenten weg, so daß $a = a^1$ ist.

Die zweite Wurzel oder Quadratwurzel aus einer Größe ist diejenige Größe, welche zweimal als Faktor gesetzt und wirklich multiplicirt die anfängliche Größe, woraus die Quadratwurzel gezogen wird, wieder gibt. Die dritte oder Kubikwurzel ist diejenige Größe, welche dreimal als Faktor gesetzt die anfängliche Größe wieder gibt, und allgemein die mte Wurzel ist diejenige Größe, welche m mal als Faktor gesetzt die anfängliche Größe wieder darstellt.

Das Zeichen für die Wurzeln ist $\sqrt{}$. Oben in seine Oeffnung setzt man die Zahl, welche den Grad der Wurzel anzeigt, und rechts neben dasselbe kommt die Größe zu stehen, aus der die Wurzel zu ziehen ist. So stellt $\sqrt[2]{a}$ oder $\sqrt{a}$ die Quadratwurzel aus a vor; $\sqrt[5]{a}$ die fünfte Wurzel aus a, und $\sqrt[m]{a}$ die mte Wurzel aus a.

§. 83. Die Rechnung mit Potenzen ist ganz einfach und verlangt keine neuen Regeln, wie eine kurze Zusammenstellung der vier Hauptverrichtungen zeigen wird.

I. Addition.

$a^2 + 3a^2 = 4a^2$ und $4a^m + 2a^m = 6a^m$

$4a^3 + 2a^5$ und $a^m + 5a^n$ bleiben unverändert.

II. Subtraktion.

$7a^3 - 4a^3 = 3a^3$

$6a^4 - 2a$ bleibt unverändert.

III. Multiplikation.

$$a^{2} . a^{5} = a^{2+5} = a^{7}$$

$$a^{m} . a^{n} = a^{m+n}$$

$$a^{6} . a^{-4} = a^{6-4} = a^{2}$$

$$a^{m} . a^{-n} = a^{m-n}$$

$a^{m} . b^{n}$ kann nicht anders ausgedrückt werden.

IV. Division.

$$\frac{a^{5}}{a^{2}} = a^{5-2} = a^{3}$$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$$

Dagegen bleibt $\frac{a^{m}}{b^{n}}$ unverändert.

§. 84. Nun leuchtet aber auch ein, daß

I. $aa . bb . cc = abc . abc$ d. i. $a^{2} . b^{2} . c^{2} = (abc)^{2}$ und allgemein $a^{m} b^{m} c^{m} = (abc)^{m}$ ist; dagegen

II. $(a^{2})^{3} = a^{2} . a^{2} . a^{2} = a^{2+2+2} = a^{2.3} = a^{6}$ und allgemein $(a^{m})^{n} = a^{mn}$.

§. 85. Ferner ist $\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$. Denn da die nte Wurzel aus der Größe a^{m} diejenige Größe ist, welche nmal als Faktor gesetzt die Größe a^{m} wiedergibt und wirklich $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = a^{m}$ ist, so muß nothwendig $\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$ sein.

Demnach ist auch $\sqrt[m]{a^m} = a$ und $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. w. Endlich ist $\left(\sqrt[m]{-a}\right)^m = -a$.

Da nun $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ und $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$ ist, so ist nothwendig $\sqrt[n]{a^m}$ mit $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ einerlei.

§. 86. Es ist $a^0 = 1$; denn $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$. Aber $0^0 = 0$.

Ferner ist $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; denn $a^{-m} = \frac{a^m . a^{-m}}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$. Folglich auch $b . a^{-m} = \frac{b}{a^m}$.

§. 87. Daß $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ sei, folgt unmittelbar aus dem Begriffe der Brüche und Potenzen. Daher ist auch $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$.

§. 88. Da die Wurzelgrößen sich als Potenzen mit gebrochenen Exponenten schreiben lassen (§. 85.), so hat auch die Rechnung mit ihnen keine Schwierigkeit, wie die folgenden Darstellungen zeigen werden. Es sollen z. B. mehre Wurzelgrößen mit verschiedenen Wurzelexponenten auf einerlei Benennung gebracht d. h. mit einerlei Wurzelexponenten geschrieben werden, so daß keine dersel-

ben ihren Werth verändert. Solche Wurzelgrößen seien z. B. $\sqrt[8]{a^5}$; $\sqrt[3]{b^7}$ und $\sqrt[2]{c^3}$; so ist

$$\sqrt[8]{a^5} = a^{\frac{5}{8}} = a^{\frac{15}{24}} = \sqrt[24]{a^{15}}$$

$$\sqrt[3]{b^7} = b^{\frac{7}{3}} = b^{\frac{56}{24}} = \sqrt[24]{b^{56}}$$

$$\sqrt[2]{c^3} = c^{\frac{3}{2}} = c^{\frac{36}{24}} = \sqrt[24]{c^{36}}$$

§. 89. Es ist $7\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{a} = 8\sqrt[m]{a}$; aber $3\sqrt[m]{a} + 2\sqrt[n]{b}$ kann nicht anders ausgedrückt werden. Eben so ist $8\sqrt[m]{a} - 3\sqrt[m]{a} = 5\sqrt[m]{a}$; aber $2\sqrt[m]{a} - \sqrt[n]{b}$ bleibt unverändert.

§. 90. Es ist $\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \,.\, \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$. Denn $\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \,.\, \sqrt[m]{c} = a^{\frac{1}{m}} \,.\, b^{\frac{1}{m}} \,.\, c^{\frac{1}{m}} = (a.b.c)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a.b.c}$. Daher auch $\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \,.\, \sqrt[m]{c}$. Wenn die Wurzelexponenten verschieden sind, so bringt man sie unter einerlei Benennung und verfährt dann auf die nämliche Art.

§. 91. Ferner ist $8\sqrt[m]{a} : 4\sqrt[m]{b} = 2\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$; denn

$$8\sqrt[m]{a} : 4\sqrt[m]{b} = \frac{8\sqrt[m]{a}}{4\sqrt[m]{b}} = 2\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Sind die Wurzelexponenten verschieden, so bringt man sie zuvor unter einerlei Benennung.

§. 92. Endlich ist $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$. Und daher ist auch umgekehrt $\sqrt[12]{4096} = \sqrt[2.2.3]{4096} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{4096}}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{16}} = \sqrt[2]{4} = 2$.

Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 93. Zur Erleichterung der Einsicht in das Verfahren der Ausziehung der Quadratwurzel bemerke man, daß

alle Quadratzahlen zweimal so viel Ziffern haben als ihre Wurzeln oder zweimal so viel weniger eine, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die Quadrate von 1 und 9, von 10 und 99, von 100 und 999 u. s. f. macht. Daher theilt man die Ziffern der Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, von der Rechten gegen die Linke in Klassen von je zwei Ziffern ab, und sucht die Wurzel theilweise.

Für die Ausziehung der Quadratwurzel und später der Kubikwurzel mache man sich auch mit folgendem Wurzeltäfelchen bekannt:

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Kubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Jede Zahl kann in zwei Theile zerlegt werden. Darum suche man die Eigenschaften des Quadrats einer jeden zweitheiligen Größe $(a+b)$, weil jede Zahl, deren Quadratwurzel gesucht werden soll, als das Quadrat einer solchen zweitheiligen Größe angesehen werden kann. Es ist aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b$.

Indem man nun aus der vorgelegten Zahl die einzelnen Theile, woraus sie besteht, heraussucht und heraushebt, ergeben sich zugleich auch ihre Wurzeltheile, die man verlangt.

Zu dem Ende ziehe man von der Quadratzahl erster Klasse linker Hand das in ihr befindliche höchste Quadrat (a^2) ab und setze seine Wurzel (a) rechts hinter die Zahl, wie bei einer Division. Dann lasse man die nächstfolgende Klasse herab und setze sie neben den etwa gebliebenen Rest; darin ist noch $2ab + b^2$ oder $(2a+b)b$ enthalten. Durch Division mit $2a$ ziehe man den zweiten Wurzeltheil b heraus, setze ihn neben den ersten, und ziehe $2ab + b^2$ oder $(2a+b)b$ vom Reste und der herabge-

lassenen Klasse ab, indem man die Zahl b so groß als möglich nimmt.

Wenn noch mehr Klassen vorhanden sind, so verfährt man wie bisher, dergestalt, daß man immer die gefundenen Wurzeltheile als den ersten betrachtet, und dazu den letzten sucht; denn es ist auch

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$$

Wenn am Ende Alles aufgeht, so ist die gefundene Wurzel genau und vollkommen die Quadratwurzel der vorgelegten Zahl, wie dieß der Fall in folgenden Beispielen ist.

$$\begin{array}{rl} & 72|25\ (85 \\ a^2 = & 64|\quad\ \ ab \\ \hline & 8\,25 \\ (2a+b = & 165) \\ (2a+b)b = & 8\,25 \\ \hline & * \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52|41|76\ (724 \\ 49|\quad|\quad\ \ \\ \hline 3\,41 \\ (142) \\ 2\,84 \\ \hline 5776 \\ (1444) \\ 5776 \\ \hline * \end{array}$$

Es ist demnach $\sqrt{7225} = 85$ und $\sqrt{524176} = 724$. Eben so findet man $\sqrt{94864} = 308$ und $\sqrt{84750436} = 9206$.

§. 94. Bleibt am Ende ein Rest, so fehlt zur vollkommenen Quadratwurzel noch ein Bruch. Man kann sich aber der Wahrheit des fehlenden Bruches immer mehr nähern dadurch, daß man an die vorgegebene Zahl so viele Paare von Nullen anhängt, als man Decimalstellen in der Wurzel verlangt, und die Rechnung auf die obige Art fortsetzt. Der Grund davon liegt darin, daß die Decimalbrüche im Quadrate immer so viele Paare von Decimalstellen geben als in der Wurzel einzelne Stellen sind. Z. B. $0{,}4^2 = 0{,}16$; $0{,}03^2 = 0{,}0009$; $0{,}042^2 = 0{,}001764$ u. s. w. Ein Beispiel dieser Art ist folgendes:

$$\begin{array}{rl}
 & 2|45 \ (15,65\ldots \\
a^2 = & 1| \\
\hline
 & 1\,45 \\
(2a+b = & 25) \\
(2a+b)b = & 1\,25 \\
\hline
 & 2000 \\
(2a+b = & 306) \\
(2a+b)b = & 1836 \\
\hline
 & 16400 \\
(2a+b = & 3125) \\
(2a+b)b = & 15625 \\
\hline
 & 775
\end{array}$$

Hier sind wegen der zwei Paare angehängter Nullen in der Quadratzahl zwei Decimalstellen in der Wurzel abgeschnitten. Andere Beispiele sind

$$\sqrt{2} = 1,4142136\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$$
$$\sqrt{12} = 3,4641016\ldots$$

Eben so kann aus Decimalbrüchen die Quadratwurzel gezogen werden; nur muß, wenn die Anzahl der Decimalstellen ungerade ist, dieselbe durch Anhängen von Nullen gerade gemacht werden. Man erhält in der Wurzel immer so viele einzelne Decimalstellen, als in der vorliegenden Quadratzahl Paare von Decimalstellen vorhanden sind. So findet man z. B.

$$\sqrt{0,104976} = 0,324$$
$$\sqrt{0,056} = 0,236\ldots$$
$$\sqrt{81,17} = 9,009\ldots$$
$$\sqrt{24,283} = 4,927\ldots$$

§. 95. Bei gewöhnlichen Brüchen muß (wegen §. 87.) aus Zähler und Nenner die Wurzel gezogen werden. Z. B. $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8}$. Weil aber die wenigsten Zahlen vollkommene Quadratzahlen sind, so thut man im Ganzen am besten, den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu

verwandeln und aus diesem die Wurzel zu ziehen. Z. B. $\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866025 \ldots\ldots$

Ausziehung der Kubikwurzel.

§. 96. Die Ausziehung der Kubikwurzel beruht auf ähnlichen Grundsätzen wie die der Quadratwurzel. Es ist hier nur zu berücksichtigen, daß jede Kubikzahl dreimal so viel Ziffern enthält als ihre Wurzel oder dreimal so viel weniger zwei oder auch nur weniger eine. Deßhalb hat man die vorgegebene Zahl, aus welcher die Kubikwurzel soll gezogen werden, von der Rechten zur Linken in Klassen von je drei Ziffern zu theilen.

Sodann muß man auch hier die Eigenschaften des Kubus oder Würfels einer zweitheiligen Größe kennen lernen, weil auch hier die Wurzel theilweise gesucht wird. Es ist aber

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Nun wird man bei gehöriger Aufmerksamkeit das folgende Verfahren ohne Schwierigkeit begreifen, wo aus der Zahl 551368 und 22188041 die Kubikwurzel soll gezogen werden.

$551|368 \;(82$
$a^3 = 512| \quad ab$
39368
$(3a^2 = 192)$
$3a^2b = 384$
$3ab^2 = 96$
$b^3 = 8$
39368
*

$22|188|041 \;(281$
8
14188
(12)
96
384
512
13952
236041
(2352)
2352
84
1
236041
*

Es ist also $\sqrt[3]{551368} = 82$ und $\sqrt{22188041} = 281$.

Andere Beispiele sind

$$\sqrt[3]{8741816} = 206$$

$$\sqrt[3]{1879080904} = 1234$$

$$\sqrt[3]{75955677875} = 4235$$

$$\sqrt[3]{22034422942875} = 28035$$

§. 97. Bleibt am Ende ein Rest, so ist die Wurzel unvollständig, und man nähert sich immer mehr der wahren Wurzel, wenn man an die gegebene Kubikzahl so oft drei Nullen anhängt, als man in der Wurzel Decimalstellen verlangt; denn jeder Decimalbruch hat im Kubus dreimal so viel Decimalstellen als er in der Wurzel enthält. So findet man z. B.

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599205 \ldots.$$

$$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422496 \ldots.$$

$$\sqrt[3]{12} = 2{,}2894286 \ldots.$$

$$\sqrt[3]{23456} = 28{,}625 \ldots.$$

Darum muß aber auch jeder Decimalbruch, aus welchem die Kubikwurzel gezogen werden soll, vollständige Klassen von je drei Ziffern enthalten; und wo dieß der Fall nicht ist, da muß man durch Anhängen von Nullen am Ende nachhelfen. Z. B. wenn die Kubikwurzel aus 14,8 gezogen werden soll, so muß man erst zwei Nullen anhängen, und die Rechnung sieht dann also aus:

$$\begin{array}{rl}
14{,}\!\!\!\!\!& \!\!\!|800 \quad (2{,}45\ldots\ldots \\
8 & | \\
\hline
 & 6800 \\
 & (12) \\
 & 48 \\
 & \;\;96 \\
 & \;\;\;\;64 \\
\hline
 & 5824 \\
\hline
 & 976000 \\
 & (1728) \\
 & 8640 \\
 & \;\;1800 \\
 & \;\;\;\;125 \\
\hline
 & 882125 \\
\hline
 & 93875
\end{array}$$

Es ist also $\sqrt[3]{14{,}8} = 2{,}45\ldots\ldots$

§. 98. Bei gewöhnlichen Brüchen wird die Kubikwurzel aus Zähler und Nenner gezogen, und gemischte Zahlen müssen zuvor in unächte Brüche verwandelt werden. Z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5} \text{ und } \sqrt[3]{307\tfrac{35}{64}} = \sqrt[3]{\frac{19683}{64}} = \frac{27}{4} = 6\tfrac{3}{4}.$$

Da aber die wenigsten Brüche vollständige Kubikzahlen enthalten, so verwandelt man dieselben lieber in Decimalbrüche und zieht aus diesen die Kubikwurzel. Z. B.

$$\sqrt[3]{\tfrac{5}{16}} = \sqrt[3]{0{,}3125} = 0{,}6786\ldots\ldots$$

Irrationale und unmögliche Größen.

§. 99. Es ist $\sqrt{16} = 4$ und $\sqrt{25} = 5$; also müssen alle Quadratwurzeln zwischen 16 und 25 größer als 4 und kleiner als 5 sein. Ueberhaupt seien a und m ganze bejahte Zahlen, und $\sqrt[m]{a}$ falle zwischen A und A + 1, so kann $\sqrt[m]{a}$ keine ganze Zahl sein, weil zwischen A und A + 1 keine ganze Zahl fallen kann. Ein Bruch aber kann $\sqrt[m]{a}$ ebenfalls nicht sein, weil jede Potenz eines Bruchs wiederum ein Bruch ist, und $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m$ doch eine

ganze Zahl a sein soll. Es gibt also Größen, welche weder durch ganze Einheiten noch durch Theile der Einheiten vollkommen ausgedrückt werden können; man nennt sie deßhalb irrationale Größen. Dergleichen sind z. B. alle Quadratwurzeln aus Zahlen zwischen 1 und 4, 4 und 9, 9 und 16 u. s. w.; ferner alle Kubikwurzeln aus Zahlen zwischen 1 und 8, 8 und 27, 27 und 64 u. s. w. Den Werth solcher Zahlen kann man zwar nie ganz genau angeben; sich aber demselben, so weit man will, nähern, wie wir oben §. 94. an einigen Beispielen gesehen haben.

§. 100. Jede Größe, sie mag bejaht oder verneint sein, gibt, auf eine gerade Potenz erhoben, immer eine bejahte Größe. Darum muß auch jede gerade Wurzel aus einer bejahten Größe immer zwei gleiche, aber in ihren Zeichen entgegengesetzte Werthe haben, z. B. $\sqrt{16} = \pm 4$ und allgemein ist, wenn m eine ganze Zahl bedeutet und $b^{2m} = a$ ist, auch $b = \pm \sqrt[2m]{a}$. Dagegen behalten die ungeraden Wurzeln die Zeichen ihrer Potenzen, und es ist $\sqrt[3]{64} = 4$; aber $\sqrt[3]{-64} = -4$.

§. 101. Weil es keine Größe gibt, welche, auf eine gerade Potenz erhoben, eine verneinte Größe werden könnte: so ist, wenn m eine ganze Zahl bedeutet, der Ausdruck $\sqrt[2m]{-a}$ eine unmögliche (eingebildete, imaginäre) Größe; und weil $-a = (+a) \cdot (-1)$ ist, so ist der allgemeine Ausdruck der imaginären Größe $\sqrt[2m]{-1}$.

§. 102. Da $-a = (-1) \cdot a$ ist, so wird $\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$ und eben so $\sqrt{-b} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}$; demnach $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{ab} = -1 \cdot \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$.

Man findet $(2 + \sqrt{-3})^3 = -10 + 9 \cdot \sqrt{-3}$ und $(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8$. Eben so wird $(1 + \sqrt{-a}) \cdot (1 - \sqrt{-a}) = 1 + a$ und $(3 + \sqrt{-1}) \cdot (3 - \sqrt{-1}) = 10$.

Siebentes Kapitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 103. Man kann zwei Größen oder Zahlen mit einander vergleichen und zwar auf doppelte Weise, einmal, wenn man nachsieht, wie viele Einheiten die eine mehr hat als die andere; das anderemal, wenn man untersucht, wie oft die eine Zahl die andere in sich enthält. Die Vergleichung in der ersten Hinsicht heißt das arithmetische Verhältniß; die andere das geometrische.

§. 104. Man sieht, daß arithmetische Verhältnisse mit Unterschieden oder Differenzen; und geometrische Verhältnisse mit Quotienten oder Brüchen ganz einerlei sind; weßhalb man auch die nämlichen Bezeichnungen beibehalten hat.

§. 105. Die Größen, welche mit einander verglichen werden, heißen die Glieder des Verhältnisses, und zwar die erste das vorhergehende oder das Vorderglied, und die zweite das nachfolgende oder das Hinterglied. Das Verhältniß heißt ein steigendes, wenn das zweite Glied größer als das erste ist; ein fallendes, wenn es kleiner ist. Diejenige Zahl, welche die Größe des Verhältnisses ausdrückt, heißt überhaupt der Verhältnißname, und insbesondere bei dem arithmetischen Verhältnisse der Unterschied, und bei dem geometrischen der Exponent oder Name.

§. 106. Arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn die Unterschiede ihrer Glieder gleich sind; und geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Exponenten oder Namen einander gleich sind. Natürlich kann aber ein steigendes Verhältniß nur einem steigenden, und ein fallendes nur einem fallenden gleich sein.

§. 107. Die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen heißt eine Proportion, welche daher eine arithmetische und eine geometrische sein kann. Jede enthält vier Glieder, von welchen das erste und vierte die äußern, das zweite und dritte die mittlern oder innern Proportionalglieder genannt werden.

Sind die mittlern Glieder einander gleich, so heißt die Proportion stetig oder zusammenhängend; im entgegengesetzten Falle aber abgesondert oder getrennt.

Wenn übrigens von Verhältnissen oder Proportionen schlechtweg die Rede ist, so sind gewöhnlich geometrische zu verstehen.

§. 108. Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern.

Beweis. Das erste Glied hat eben so viele Einheiten mehr oder weniger als das zweite, so viele das letzte weniger oder mehr enthält als das dritte. Um so viel also das eine der äußern Glieder das eine der mittlern an Größe übertrifft, um eben so viel wird das andere der äußern Glieder von dem andern der mittlern an Größe übertroffen; folglich muß die Summe von beiden gleichgroß sein.

Drückt nun $a - b = c - d$ jede arithmetische Proportion aus, so ist $a + d = b + c$.

§. 109. Zusatz. Wenn vier Größen so beschaffen sind, daß die Summe von zweien derselben gleich ist der Summe der zwei andern so läßt sich aus ihnen eine arithmetische Proportion bilden, dadurch, daß man die eine Summe zu den äußern, die andere aber zu den mittlern Gliedern macht.

§. 110. Zus. In einer stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten mittlern. In $a - b = b - d$ ist $a + d = b + b = 2b$.

§. 111. Zus. Aus $2b = a + d$ wird $b = \frac{a+d}{2}$ d. h. das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion ist gleich der halben Summe der beiden äußern Glieder.

§. 112. Zus. Das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion nennt man auch das arithmetische Mittel. Und diesen Ausdruck gebraucht man noch im weitern Sinne, und versteht darunter gleichsam eine mittlere Zahl zwischen mehren andern, nämlich diejenige Zahl, die man findet, wenn man die gegebenen Zahlen addirt und ihre Summe durch diejenige Zahl dividirt, welche die Menge der gegebenen Zahlen anzeigt. Hievon macht man im Leben häufig Gebrauch, z. B. wenn man die mittlern Einkünfte eines Gutes, Amtes, Gewerbes, die mittlere Anzahl der Gebornen, Gestorbenen in einem Orte oder Lande wissen will. Die Anzahl der Gebornen sei z. B. fünf Jahre nach einander folgende: 512, 489, 493, 530, 526. Die Summe dieser Zahlen ist 2550; und $\frac{2550}{5} = 510$ als die Anzahl der Gebornen, die man auf jedes Jahr im Durchschnitt rechnen darf. Je mehr Zahlen man zusammen nimmt, desto sicherer wird das Ergebniß.

§. 113. Aufgabe. Aus drei bekannten Gliedern einer arithmetischen Proportion das vierte unbekannte zu finden.

Auflösung. Aus $a - b = c - d$ wird $a + d = b + c$. Diese zwei gleiche Größen behandele und verändere man (nach Einleit. §. 10. Nr. 5.) gesetzlich so, daß die zu suchende oder unbekannte ganz allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommt. Dadurch wird

1) $a = b + c - d$
2) $b = a + d - c$
3) $c = a + d - b$
4) $d = b + c - a$

§. 114. Lehrs. In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der innern.

Bew. Jede geometrische Proportion $a : b = c : d$ kann auch (nach §. 104.) als zwei gleiche Brüche $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geschrieben werden. Jeden derselben multiplicire man mit bd, so wird $ad = bc$.

§. 115. Zus. In einer stetigen Proportion $a : b = b : d$ ist $b^2 = ad$ und $b = \sqrt{ad}$. Ein solches mittleres Glied b einer stetigen Proportion heißt auch die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zwei Zahlen (a und d), und wird also gefunden, wenn man aus dem Produkte dieser beiden Zahlen die Quadratwurzel zieht.

§. 116. Lehrs. Aus den vier Faktoren zweier gleichen Produkte läßt sich allemal eine geometrische Proportion bilden.

Bew. Es sei $ad = bc$. Jedes dieser Produkte dividire man durch bd, so wird $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und daraus weiter $a : b = c : d$.

§. 117. Zus. Es leuchtet ein, daß die Faktoren des einen Produktes zu den äußern, die des andern aber zu den innern Gliedern gemacht werden. Die Wahl und Stellung aber ist beliebig, wenn nur die Glieder so gestellt werden, daß das Produkt der äußern dem Produkte der innern gleich bleibt. So erleidet jede Proportion 8 verschiedene Stellungen seiner Glieder.

§. 118. Lehrs. In jeder geometrischen Proportion lassen sich die beiden mittlern Glieder mit einander verwechseln.

Bew. Anstatt der Proportion $a : b = c : d$ schreibe man $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Jeden dieser zwei gleichen Brüche multi-

plicire man mit $\frac{b}{c}$, so erhält man $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, woraus die Proportion $a : c = b : d$ entsteht.

§. 119. Lehrs. Wenn $a : b = c : d$ allgemein jede geometrische Proportion vorstellt, so ist auch

I. $a + b : b = c + d : d$

II. $a - b : b = c - d : d$

III. $a + b : a = c + d : c$

IV. $a - b : a = c - d : c$

Bew. I. Es läßt sich anstatt $a : b = c : d$ auch schreiben

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

daher auch noch $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ oder $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

und daraus wird $a + b : b = c + d : d$

II. Der Gang der Untersuchung ist derselbe, wie bei Nr. I., wenn man nur — anstatt + setzt.

III. Für $a : b = c : d$ kann man auch setzen $b : a = d : c$; woraus

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

und $1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{d}{c}$ oder $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$. Dieß gibt $a + b : a = c + d : c$

IV. Man verfahre, wie in Nr. III., nur daß man überall — anstatt + schreibt.

§. 120. Zus. Aus den vorhergehenden Wahrheiten leitet man auf ganz leichte Weise den Satz her

$$a + b : c + d = a - b : c - d.$$

§. 121. Lehrs. Wenn $a : b = c : d$; so ist auch $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$.

Bew. Man schreibe die Proportion als zwei gleiche Brüche also

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und multiplicire jeden mit sich selbst, so bekommt man

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

und daraus $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$.

§. 122. Zus. Ueberhaupt erhält man $a^m : b^m = c^m : d^m$ aus $a : b = c : d$, wenn man fortgesetzt das gewonnene Ergebniß einerseits durch $\frac{a}{b}$, andererseits durch $\frac{c}{d}$ multiplicirt; und eben so umgekehrt auch $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

§. 123. Lehrs. In einer Reihe gleicher Verhältnisse verhält sich immer die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Bew. Es sei allgemein

$$a : b = c : d = e : f \text{ u. s. w.}$$

so lassen sich nach den bisherigen Lehren folgende Veränderungen vornehmen:

$$a : c = b : d$$
$$a + c : c = b + d : d$$
$$a + c : b + d = c : d$$
$$= e : f$$
$$a + c : e = b + d : f$$
$$a + c + e : e = b + d + f : f$$
$$a + c + e : b + d + f = e : f$$
$$= c : d$$
$$= a : b$$

Dieß läßt sich so fort beweisen, wenn auch noch so viele gleiche Verhältnisse gegeben sind.

§. 124. Lehrs. Zwei Größen bleiben in gleichem geometrischen Verhältnisse zu einander, wenn man sie mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

Bew. Das geometrische Verhältniß ist mit einem Bruche einerlei. Nun weiß man, daß ein Bruch in seinem Werthe unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt.

§. 125. Zus. Man kann daher in jeder geometrischen Proportion die zwei Glieder eines jeden Verhältnisses mit einerlei Zahl multipliciren oder dividiren; und darum auch das erste und dritte Glied (§. 118.).

§. 126. Lehrs. Die Produkte gleichliegender Glieder von mehren Proportionen sind ebenfalls proportionirt.

Bew. Es sei $a : b = c : d$
$e : f = g : h$
$i : k = l : m$ u. s. w.

so läßt sich dafür auch schreiben

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

$$\frac{i}{k} = \frac{l}{m}$$

und nun auch ferner

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{i}{k} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h} \cdot \frac{l}{m}$$

oder $\frac{a \cdot e \cdot i}{b \cdot f \cdot k} = \frac{c \cdot g \cdot l}{d \cdot h \cdot m}$

woraus der Satz hervorgeht

$$a \cdot e \cdot i : b \cdot f \cdot k = c \cdot g \cdot l : d \cdot h \cdot m$$

§. 127. Zus. Wenn daher

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ b : e = d : f \\ e : g = f : h \text{ u. s. w. ist} \\ \hline \end{array}$$

so ist $a . b . e : b . e . g = c . d . f : d . f . h$
und $a : g = c : h$.

§. 128. Zus. In

$$\begin{array}{rl} & a : b = c : d \\ \text{und} & b : e = f : c \\ \hline \text{ist daher auch} & a : e = f : d \end{array}$$

Eben so in

$$\begin{array}{rl} & a : b = c : d \\ \text{und} & e : f = d : g \\ \hline \text{ist} & ae : bf = c : g \end{array}$$

Endlich in

$$\begin{array}{l} a : b = A : B \\ c : d = B : C \\ e : f = C : D \\ g : h = D : E \text{ u. s. w.} \\ \hline \end{array}$$

ist $aceg : bdfh = A : E$.

§. 129. Aufg. Zu drei bekannten Gliedern einer geometrischen Proportion das unbekannte vierte, das wievielte es auch sein mag, zu finden.

Aufl. Es sei allgemein $a : b = c : d$; so ist bekanntlich $a . d = b . c$. Wenn man nun hier mit derjenigen Größe auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dividirt, womit die zu suchende oder unbekannte Größe multiplicirt ist; so kommt

$$a = \frac{b . c}{d}$$

$$b = \frac{a . d}{c}$$

$$c = \frac{a . d}{b}$$

$$d = \frac{b . c}{a}$$

§. 130. Zus. Wenn in zwei geometrischen Proportionen drei Glieder der einen gleich sind den drei entsprechenden Gliedern der andern: so muß auch das übrige vierte in beiden Proportionen gleich groß sein.

§. 131. Aufg. Eine Zahl in mehre Theile so zu theilen, daß sich diese Theile wie gegebene andere Zahlen verhalten.

Aufl. Es leuchtet ein, daß die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen sich verhalte zu jeder einzelnen Verhältnißzahl, wie sich die zu theilende Zahl (als Summe) zu jedem zu suchenden Theile (als der neuen Verhältnißzahl) verhalten soll. Darum addire man zuerst die gegebenen Verhältnißzahlen und setze ihre Summe in das erste Glied einer geometrischen Proportion, jede einzelne gegebene Verhältnißzahl in das zweite, und die zu theilende Summe oder Zahl in das dritte Glied. Dieß gibt so viele verschiedene Proportionen (mit fehlendem vierten Gliede), als Verhältnißzahlen gegeben sind. Zu diesen Proportionen suche man das fehlende vierte Glied, wodurch man nach der Reihe die verlangten Theile erhält.

§. 132. Zus. Nicht immer sind die Verhältnißzahlen in fortlaufender Reihe gegeben; alsdann müssen sie darnach eingerichtet werden. Es kann dieß unter andern also geschehen. Es sei z. B. die Zahl 594 in drei Theile so zu theilen, daß der erste Theil zum zweiten sich verhalte wie die Zahlen 3 : 5 und der zweite zum dritten wie 8 : 7. Dieses letztere Verhältniß verändere man so, daß es zwar sich gleich bleibe, aber die erste Zahl (8) mit der letzten Zahl (5) des vorigen Verhältniß gleich werde. Dieß geschieht durch den Ansatz $8 : 7 = 5 : x$ und $x = \frac{35}{8}$. Es ist also $8 : 7 = 5 : \frac{35}{8}$. Demnach soll die Zahl 594 in drei Theile so getheilt werden, daß sich dieselben ver-

halten wie die Zahlen 3, 5, $\frac{35}{8}$ oder wie die Zahlen 24, 40, 35.

Auf gleiche Weise verfährt man, wenn mehre solche Verhältnisse gegeben sind.

§. 133. Der Nutzen der Proportionslehre zieht sich durch die ganze Mathematik. Hier verdient schon die Anwendung derselben auf Rechnungen des gemeinen Lebens bemerkt zu werden. Allgemein bekannt und von unendlichem Gebrauche ist die sogenannte Regel Detri, welche da Statt findet, wo von vier Zahlen oder Größen je zwei sich so verhalten wie die zwei übrigen, dergestalt daß mit dem Wachsthume der einen Größe auch die andere verhältnißmäßig wächst oder mit der Abnahme der einen auch die andere abnimmt, welches geschieht z. B. bei Waaren und ihren Preisen, bei Kapitalien und Zinsen, bei Arbeit und Lohn dafür u. s. w. Von diesen sagt man, daß sie im geraden Verhältnisse stehen. Wenn aber die eine Größe so vielmal wächst als die andere abnimmt oder die eine so vielmal abnimmt als die andere wächst, so sagt man: die Größen stehen in umgekehrtem Verhältnisse, z. B. die Menge der Arbeiter und die zu einerlei Arbeit erforderliche Zeit; die Menge der Menschen und die Zeit, in welcher sie eine bestimmte Menge Nahrungsmittel verzehren; die Größe des Fusses oder eines andern Maaßes und die Anzahl derselben in einer bestimmten Länge; der Preis des Getreides und das Gewicht des Brotes u. s. w. Um nun einen richtigen Ansatz zu machen, setze man vor Allem in das dritte Glied diejenige Größe, welche mit der zu suchenden gleichartig ist. Hierauf untersuche man, ob nach der Natur und Beschaffenheit der Sache die zu suchende vierte Zahl größer oder kleiner werden muß als die dritte. Im ersten Falle wird von den beiden übrigen gleichartigen Größen, welche das erste Verhältniß bilden, die größere, und im

zweiten Falle die kleinere in das zweite Glied gesetzt und die andere noch übrige in das erste. Z. B. Wenn man weiß, daß 20 ℔ einer Waare mit 12 fl. bezahlt worden sind, und man will den Werth von 14 ℔ derselben Waare angeben, so geht aus der Natur der Sache hervor, daß 14 ℔ weniger kosten als 20 ℔. Darum ist der richtige Ansatz

$$20 : 14 = 12 : x$$

woraus $x = \frac{14 \times 12}{20} = 8\frac{2}{5}$ fl. als der Preis von 14 ℔.

Ist dagegen bekannt, daß zu einer bestimmten Arbeit 15 Arbeiter 18 Tage Zeit brauchen und man stellt für die nämliche Arbeit nur 7 Arbeiter an: so leuchtet ein, daß die Arbeit erst nach mehr denn 18 Tagen fertig werden kann, und man setzt an

$$7 : 15 = 18 : x$$

woraus $x = \frac{15 \times 18}{7} = 38\frac{4}{7}$ Tage Zeit.

§. 134. Wenn eine Größe von den Werthen mehrer Größen abhängt, so wird dieselbe durch diejenige Rechnungsart gefunden, welche unter dem Namen der zusammengesetzten Regel Detri oder Regel Dequinque, Regel Deseptem u. s. w. bekannt ist, welche Benennung daher kommt, weil die unbekannte Zahl aus 5 oder 7 u. s. w. bekannten und gegebenen Zahlen gesucht wird. Das Verfahren dabei ist folgendes: Diejenige Größe, welche mit der zu suchenden gleichartig ist, kommt in das dritte Glied zu stehen, in das erste und zweite Glied werden unter einander die übrigen gegebenen Verhältnisse nach den nämlichen Grundsätzen gebracht, welche bei der Regel Detri aufgestellt worden sind. Z. B. Eine Mauer, welche 1 Fuß dick, 80 Fuß lang und $6\frac{1}{4}$ Fuß hoch ist, kann von 12 Maurern, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten, in 8 Tagen gemacht werden. Wie viel Tage werden zu einer

Mauer, die $1\frac{1}{2}$ Fuß dick, 200 Fuß lang und $6\frac{1}{2}$ Fuß hoch werden soll, 20 Maurer brauchen, welche täglich 12 Stunden arbeiten? Der Ansatz ist:

$$\left.\begin{array}{r} 1 : 1\frac{1}{2} \\ 80 : 200 \\ 6\frac{1}{4} : 6\frac{1}{2} \\ 20 : 12 \\ 12 : 10 \end{array}\right\} = 8 : x \text{ und } x = 15\frac{3}{5} \text{ Tage.}$$

Nach frühern Wahrheiten gibt das Produkt aller ersten Glieder das erste Glied einer neuen Proportion, das der zweiten Glieder das zweite Glied, und das dritte Glied bleibt unverändert. Zu diesen dreien Gliedern sucht man x oder das vierte Glied auf bekannte Weise. So findet man im obigen Beispiele $x = 15\frac{3}{5}$ Tage. Daß man in die ersten und zweiten Glieder oder in die ersten und in das dritte Glied mit einerlei Zahl dividiren oder multipliciren dürfe, ist aus frühern Wahrheiten bekannt. Dadurch aber kann diese Rechnungsart oft gar sehr vereinfacht und abgekürzt werden.

§. 135. Wenn das Verhältniß zweier Größen nicht unmittelbar bekannt ist, sondern erst durch gegebene Zwischenverhältnisse bestimmt werden muß: so geschieht dieß durch die Kettenregel, welche gleichfalls auf einer der obigen Wahrheiten (§. 128.) beruht. Gemeiniglich werden hier die Proportionen als gleiche Produkte angegeben, z. B. 129,38 rheinländische Fuß betragen 139,13 bairische Fuß; nicht so häufig in der Gestalt einer Proportion, als: der bairische Fuß verhält sich zum rheinländischen wie 129,38 zu 139,13. Man kann daher den Ansatz unter der Gestalt von Proportionen machen, oder weit bequemer mit Gleichheitssätzen. Z. B. Wenn ein Stück holländisches Tuch von 30 brabanter Ellen 260 holländische Gulden kostet und 1 holl. fl. = 20 Stüver, 104 Stüver = 1 holl. Dukaten, 1 holl. Dukaten = 4 fl. 28 Kr. wiener Kurrent

und 20 fl. wiener Kurrent = 24 fl. rhn. sind: wie viel Gulden kostet 1 bairische Elle von diesem Tuche, da 100 brab. Ellen = 89 wiener Ellen und 369 wiener Ellen = 345 bairische Ellen sind?

Im Kettensatze wird nun oben linker Hand die zu suchende, unbekannte Zahl gesetzt, und ihr gegenüber die Fragezahl d. h. diejenige, von welcher man Etwas wissen will. Darunter setzt man die übrigen Vergleichungssätze so, daß zur Linken immer diejenige Zahl oder Größe zu stehen kommt, welche mit der nächstvorhergehenden zur Rechten geschriebenen Zahl gleichartig ist, und zur Rechten diejenige, welche mit ihr als gleich verbunden ist. Auf diese Weise wird mit allen gegebenen Vergleichungssätzen fortgefahren, bis man zuletzt zur Rechten auf diejenige Größe kommt, welche mit der zu suchenden gleichartig ist. Nun werden die Zahlen in jeder Reihe für sich multiplicirt und mit dem Produkte linker Hand in das Produkt rechter Hand dividirt. Der Quotient gibt die gesuchte Zahl. Daß man auch hier zur Abkürzung der Rechnung in beiden Reihen gleichgroße Zahlen oder Faktoren gegenseitig ausstreichen könne, wird Jeder leicht begreifen. Darnach wird vorige Aufgabe also angesetzt und berechnet:

x fl. rhn.	1 bair. Elle
345 bair. E.	369 wien. Ellen
89 w. E.	100 brab. Ellen
30 br. E.	260 holl. fl.
1 holl. fl.	20 Stüver
104 Stüv.	1 holl. Dukaten
1 holl. Duk.	$4\frac{7}{15}$ wien. Kurr.
20 w. K.	24 fl. rhn.

$x = 10,735\ldots$ oder sehr nahe $10\frac{3}{4}$ fl. rhn.

§. 136. Die Gesellschafts- und Vermischungsrechnung ist nichts anders als die Anwendung der (obigen §. 131. befindlichen) Aufgabe: eine Zahl in mehre

Theile so zu theilen, daß sich diese Theile wie gegebene andere Zahlen verhalten. Z. B. Ein Herr vermacht seinen drei Dienstboten 1200 fl., worein sie sich nach dem Verhältnisse ihres bisherigen Lohnes theilen sollen. Nun hatte der Dienstbote A bisher 40 fl. jährlichen Lohn, B 36 fl. und C 24 fl. erhalten. Wie viel wird demnach Jeder bekommen?

100 : 40 = 1200 : x und x = 480 fl. als Antheil des A
100 : 36 = 1200 : y und y = 432 fl. = = = B
100 : 24 = 1200 : z und z = 288 fl. = = = C

Von zwei Kaufleuten hat der eine A 90 Thlr. 3 Monate lang stehen, der andere B 120 Thlr. 2 Monate lang. Damit werden 125 Thlr. gewonnen. Wie groß ist der Gewinn eines Jeden? Das Produkt der eingelegten Summe in die Zeit gibt die Verhältnißzahlen, welche für A $90 \times 3 = 270$ und für B $120 \times 2 = 240$ sind. Weil aber $270 : 240 = 9 : 8$; so kann man hier abkürzen und also rechnen:

17 : 9 = 125 : Gewinn des A
17 : 8 = 125 : Gewinn des B

und man wird des A Gewinn = $66\frac{3}{17}$ Thlr. und den des B = $58\frac{14}{17}$ Thlr. finden.

Eine Mischung soll aus drei Bestandtheilen A, B und C so zusammengesetzt werden, daß diese Bestandtheile darin in dem Verhältniß 1 : 3 : 6 erscheinen. Wie viel Lothe wird von jedem dieser Theile genommen werden müssen, wenn die ganze Mischung 15 Lothe wiegen soll?

10 : 1 = 15 : A
10 : 3 = 15 : B
10 : 6 = 15 : C

also werden von A 1,5 Loth, von B 4,5 Loth und von C 9 Loth genommen werden müssen.

Achtes Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 137. Es sei $a^m = A$; so nennt man den Exponenten m der Potenzgröße a^m oder der Größe A auch den Logarithmen derselben und bezeichnet dieß durch $m = \log a^m = \log A$. Eben so, wenn $b^n = B$ gesetzet wird, ist $n = \log b^n = \log B$.

Wenn man bei einer bestimmten aber beliebigen Zahl a stehen bleibt und sie als Wurzel annimmt, von welcher alle übrigen Zahlen als Potenzen betrachtet werden: so heißt jene Zahl a die Grundzahl oder Basis. Die Logarithmen mit den zugehörigen Zahlen bilden ein logarithmisches System, welches man bequem in Tafeln zusammenstellen kann, so daß neben den Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung ihre Logarithmen stehen.

§. 138. Setzt man in $m = \log a^m$ die Größe $m = 1$; so erhält man $1 = \log a$ und für $m = 0$ wird $0 = \log a^0 = \log 1$. In jedem logarithmischen System ist also der Logarithme der Grundzahl gleich der Einheit, und der Logarithme der Einheit ist gleich Null.

§. 139. Man setze $a^m = A$ und $a^n = B$; so ist $A . B = a^{m+n}$ und $m + n = \log (A . B)$. Aber es ist $m = \log A$ und $n = \log B$; demnach auch $\log (A . B) = \log A + \log B$.

Bei gleicher Voraussetzung ist $\frac{A}{B} = a^{m-n}$ und $m - n = \log \frac{A}{B}$; daher auch $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$.

Für $a^m = A$, wo $m = \log A$ ist, wird $a^{mn} = A^n$, wo auf gleiche Weise $m\,n = \log A^n$ ist. Setzt man in dem letzten Ausdrucke für m sein Gleiches log A; so erhält man $\log A^n = n \cdot \log A$.

Man setze $\sqrt[n]{A} = x$; so ist $A = x^n$ und $n \cdot \log x = \log A$; woraus $\log x = \frac{\log A}{n}$ oder $\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}$.

Diese vier Wahrheiten enthalten die Theorie für den Gebrauch der Logarithmen. Sie lehren, daß durch die Logarithmen die Multiplikation in Addition, die Division in Subtraktion, die Erhebung auf Potenzen in Multiplikation und die Wurzelziehung in Division verwandelt wird — wodurch sich die Rechnungen sehr bequem abmachen lassen.

§. 140. In dem gemeinen oder briggischen, bei uns eingeführten Logarithmensystem ist die Grundzahl $a = 10$ gesetzt. Dieß gibt folgende An- und Uebersicht der Zahlen und ihrer Logarithmen:

Zahlen	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	....
	1	10	100	1000	10000	....
Logarithmen	0	1	2	3	4	....

Zahlen	....	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1
	....	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10
Logarithmen	....	—4	—3	—2	—1	0	1

Für die Zahlen zwischen 1 und 10, 10 und 100, 100 und 1000 u. s. w. sind die Logarithmen gleichfalls durch Rechnung ausgemittelt worden. Aus der obigen Darstellung erhellet übrigens, daß die Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10, 10 und 100 u. s. w.

Brüche mit oder ohne Ganze sein müssen. Die ganze Zahl des Logarithmen heißt die Charakteristik oder Kennziffer, und der Bruch, der als Decimalbruch ausgedrückt ist, die Mantisse oder Zugabe. Wie man sieht, ist die Kennziffer um eine Einheit geringer als die zum Logarithmen gehörige ganze Zahl Ziffern enthält; weßhalb auch in manchen Logarithmentafeln dieselbe als leicht erkenntlich weggelassen ist.

§. 141. Wie zu Zahlen, welche in den Tafeln stehen, die Logarithmen, und zu Logarithmen, welche genau in den Tafeln stehen, die zugehörigen Zahlen gefunden werden, ersieht man aus der Einrichtung der Tafeln, dergleichen man jetzt vielerlei hat, z. B. von Schulze, Vega, Prasse, Pasquich, Schmidt, Westphal, Winckler u. A. Eben so geht aus dem Begriff und der Natur der Logarithmen hervor, daß, wenn in den geltenden Ziffern der Zahlen, so viel deren in den Tafeln sind, am Ende oder am Anfange noch Nullen vorhanden sind, auch deren Logarithmen noch in den Tafeln zu finden sind, weil die Nullen nur auf die Kennziffer Einfluß haben, indem jede zehnfache Erhöhung der Zahl die Kennziffer des Logarithmen um eine Einheit erhöhet und jede zehnfache Verkleinerung dieselbe um eine Einheit vermindert. So ist $\log 6328 = 3{,}80127$; $\log 63280 = 4{,}80127$; $\log 6{,}328 = 0{,}80127$; $\log 0{,}006328 = 0{,}80127 - 3$ u. s. w.

§. 142. Es hat also gar keine Schwierigkeit, auch zu Decimalbrüchen die zugehörigen Logarithmen zu finden, wenn die geltenden Ziffern die Zahlen in den Tafeln nicht übersteigen. Eben so leicht kann man zu den gewöhnlichen Brüchen die Logarithmen finden, da man die Brüche nur als Quotienten zu behandeln braucht. Weil aber $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ ist, so muß man bei ächten Brüchen die Kennziffer des Logarithmen des Zählers so weit erhö-

hen, daß der Logarithme des Nenners wirklich abgezogen werden kann, und alsdann die Erhöhung hinter der Mantisse wieder abziehen. Z. B. man sucht $\log \frac{4}{7}$. Es ist

$$\begin{array}{l} \log 4 = 1{,}60206 - 1 \\ \log 7 = 0{,}84510 \\ \hline \log \frac{4}{7} = 0{,}75696 - 1 \end{array}$$

Will man diesen Weg nicht einschlagen, so kann man auch den gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, und dann seinen Logarithmen, wie vorhin (§. 141.), suchen. So ist $\frac{4}{7} = 0{,}5714\ldots$ und $\log 0{,}5714 = 0{,}75694 - 1$ etwas geringer als vorhin, weil der Decimalbruch nicht vollständig ist.

§. 143. Oft braucht man Logarithmen für Zahlen, welche aus mehr Ziffern bestehen, als die Zahlen in den Tafeln enthalten. Da hilft man sich mit der Betrachtung, daß die Differenzen der Zahlen, die schon über 1000 gehen und nicht über 2 von einander verschieden sind, sich sehr genau verhalten, wie die Differenzen der zugehörigen Logarithmen. Zu einer Zahl nun, welche die Zahlen der Tafeln übersteigt, sucht man daher durch eine Proportion den zugehörigen Logarithmen, wie das folgende Beispiel lehrt. Man will den Logarithmus der Zahl 71084 haben. Es fällt aber diese Zahl zwischen die beiden Zahlen 71090 und 71080, unter welcher Form man die zugehörigen Logarithmen in den Tafeln allemal finden kann. Man setzt nun an:

$$\begin{array}{ccc} 71090 & 71084 & 4{,}85181 \\ 71080 & 71080 & 4{,}85175 \\ \hline 10 : & 4 = & 0{,}00006 : x \end{array}$$

woraus $x = 0{,}000024$; welcher Theil zu dem Logarithmus der kleinern Zahl 4,85175 addirt wird. Dadurch

erhält man den gesuchten Logarithmus, nämlich log 71084 = 4,85177.

Hätte man zur Zahl 71,084 den Logarithmus suchen wollen, so erhielte man log 71,084 = 1,85177; weil sich in einem solchen Falle nur die Kennziffer ändert.

§. 144. Umgekehrt soll man oft zu einem Logarithmen, welcher nicht in den Tafeln steht, aber immer zwischen zwei andere fällt, die zugehörige Zahl suchen. Hier ist das vorige Verfahren gerade das umgekehrte. Ein Beispiel wird die Sache deutlich machen. Man will die zum Logarithmus 5,03429 gehörige Zahl wissen. In den kleinen Tafeln fällt derselbe zwischen die Logarithmen 5,03463 und 5,03423. Man setzt daher an:

$$\begin{array}{rrrr} 5{,}03463 & 5{,}03429 & & 108300 \\ \underline{5{,}03423} & \underline{5{,}03423} & & \underline{108200} \\ 0{,}00040 : & 0{,}00006 & = & 100 : x \end{array}$$

woraus x = 15. Diese Zahl 15 wird zur kleinern Zahl, hier zu 108200 addirt; dadurch erhält man die zum Logarithmen 5,03429 zugehörige Zahl 108215.

§. 145. Nun wollen wir noch den Gebrauch und die Anwendung der Logarithmen an einigen Beispielen zeigen.

1) Es soll ausgemittelt werden, wie groß der bairische Morgen im Vergleich mit einem berliner sei. Der bairische Längenfuß hält 129,38 pariser Linien, die bair. Ruthe 10 Fuß und auf den bair. Morgen gehen 400 Quadratruthen. Der berliner Längenfuß hat 139,13 pariser Linien, die berl. Ruthe 12 Fuß und der berl. Morgen wird zu 180 Quadratruthen gerechnet. Es ist daher

$$\text{bair. Fuß} : \text{berl. F.} = 129{,}38 : 139{,}13$$

$$\text{bair. Fuß} = \frac{129{,}38}{139{,}13} \text{ berl. Fuß}$$

$$\text{bair. Ruthe} = \frac{129{,}38 \times 10}{139{,}13 \times 12} \text{ berl. Ruthen}$$

bair. Quadratruthe $= \left[\frac{129,38 \times 10}{139,13 \times 12}\right]^2$ berl. Quadratruthen

bair. Morgen $= \left[\frac{129,38 \times 10}{139,13 \times 12}\right]^2 \cdot \frac{400}{180}$ berl. Morgen.

log 129,38	= 2,11186	log 139,13	= 2,14342
log 10	= 1	log 12	= 1,07918
	3,11186		3,22260
	2		2
	6,22372		6,44520
log 400	= 2,60206	log 180	= 2,25527
	8,82578		8,70047
	8,70047		
	0,12531		

Zum Logarithmen 0,12531 gehört aber die Zahl 1,3344.... Es ist also ein bairischer Morgen = 1,3344 berliner Morgen.

2) Welches ist der Werth von $\sqrt[5]{7845}$? Es ist

$$\log 7845 = 3,89459 \quad : 5$$
$$\log \sqrt[5]{7845} = 0,77891$$
$$\sqrt[5]{7845} = 6,0103 \ldots.$$

3) Die Zahl 6561 ist eine Potenz von 3. Es soll ausgemittelt werden, die wievielte sie ist. Man hat $3^x = 6561$ und $x \cdot \log 3 = \log 6561$; woraus $x = \frac{\log 6561}{\log 3} = \frac{3,81697}{0,47712} = 8$; also ist 6561 die 8te Potenz von 3.

Neuntes Kapitel.

Die Kombinationslehre.

§. 146. Jede Verbindung von Dingen überhaupt heißt Kombination im allgemeinen Sinne. Es gibt drei verschiedene Gesetze, nach welchen Dinge verbunden werden können. Die sämmtlichen gegebenen Dinge, so oft es möglich ist, in einer andern Ordnung aneinander reihen, heißt Versetzen oder Permutiren. Dieselben in Gruppen von zwei, drei, vier u. s. w. Dingen, so oft es möglich ist, zusammenstellen, ohne auf ihre Ordnung Rücksicht zu nehmen, heißt Kombiniren im engern Sinne. Solche Gruppen und Verbindungen von zwei, drei, vier u. s. w. Dingen heißen Amben (Binionen), Ternen (Ternionen), Quaternen u. s. w. und ein Ding allein genommen heißt Union. Endlich Kombinationen mit Versetzungen heißen Variationen.

§. 147. Aufg. Die Anzahl aller möglichen Versetzungen einer gegebenen Menge von Dingen zu finden, wenn alle Dinge verschieden sind.

Aufl. 1) Wenn zu einem Dinge a ein zweites b hinzukommt, so kann es zwei Stellen ab und ba einnehmen; also geben zwei Dinge $2 = 2 \cdot 1$ Versetzungen.

2) Kommt das dritte c dazu, so kann es in jeder der beiden vorigen Versetzungen drei Stellen einnehmen; also ist die Anzahl aller Versetzungen von drei verschiedenen Dingen $= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

3) Wenn ein viertes d hinzutritt, so kann es in jeder der vorigen 6 Versetzungen vier Stellen einnehmen; demnach haben 4 verschiedene Dinge $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Versetzungen.

4) Man kann diese Betrachtungen fortsetzen, und wird auf diese Weise überhaupt die Anzahl aller Versetzungen von m verschiedenen Dingen finden =

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Beispiel. Die vier verschiedenen Buchstaben in dem Worte amor gestatten $4 . 3 . 2 . 1 = 24$ Versetzungen, worunter die Anagrammen Roma, mora, Maro, Omar u. s. w. vorkommen.

§. 148. Aufg. Die Anzahl der Versetzungen zu finden, wenn unter den angegebenen Dingen wiederholte oder unter sich gleiche vorkommen.

Aufl. 1) Bei zwei gleichen Dingen gibt es nur eine einzige Stellung aa; folglich nur halb so viel als bei zwei verschiedenen, d. h. zwei gleiche Dinge geben $\frac{2 . 1}{1 . 2}$ Versetzungen. Eben so lassen drei Dinge, von denen zwei gleiche sind, $\frac{3 . 2 . 1}{1 . 2}$ Versetzungen zu u. s. w. Allgemein, wenn unter m Dingen zwei gleiche sind, so ist die Anzahl ihrer Versetzungen =

$$\frac{m . (m-1) \ldots\ldots 3 . 2 . 1}{2 . 1}$$

2) Wenn drei Dinge einerlei sind, so geben diese nur eine einzige Stellung, z. B. aaa, da sonst drei verschiedene Dinge $3 . 2 . 1$ Stellungen geben. Für diese Voraussetzung fallen also $3 . 2 . 1 = 6$ Stellungen in Eine zusammen, und man findet für m Dinge, unter welchen drei gleiche sich befinden, die Anzahl aller verschiedenen Versetzungen =

$$\frac{m . (m-1) \ldots\ldots 3 . 2 . 1}{3 . 2 . 1}$$

3) Eben so kann man auch zeigen, daß, wenn unter m Dingen vier gleiche vorkommen, die Anzahl aller Versetzungen sei =

$$\frac{m . (m-1) \ldots\ldots 3 . 2 . 1}{4 . 3 . 2 . 1}$$

4) Allgemein, wenn unter m Dingen p Dinge gleich

sind, so ist die Anzahl der verschiedenen Versetzungen =
$$\frac{m \cdot (m-1) \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{p \cdot (p-1) \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

4) Bei gegebenen Dingen können aber auch zwei, drei und mehr wiederholt oder gleich vorkommen. Da läßt sich denn auf ähnliche Weise und durch ähnliche Schlüsse zeigen, daß, wenn unter m Dingen ein Ding p mal, ein anderes q mal, ein drittes r mal u. s. w. vorkommt, die Anzahl der verschiedenen Versetzungen sei =
$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{p \cdot (p-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot q \cdot (q-1) \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot r \cdot (r-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Beisp. Die Dinge aaaabbbccd oder $a^4 b^3 c^2 d$ geben
$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 12600 \text{ Versetzungen.}$$

§. 149. Zus. Offenbar bestehen a^m Dinge aus m gleichen Dingen; $a^{m-1} b$ Dinge bestehen aus m Dingen mit m — 1 gleichen Dingen; $a^{m-2} b^2$ Dinge gleichfalls aus m Dingen mit m—2 und 2 gleichen Dingen; $a^{m-3} b^3$ Dinge aus m Dingen mit m — 3 und 3 gleichen Dingen. Wenn nun N die Zahl der Versetzungen ausdrückt, so ist einleuchtend

$$N(a^m) = 1$$
$$N(a^{m-1} b) = m$$
$$N(a^{m-2} b^2) = \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$$
$$N(a^{m-3} b^3) = \frac{m \cdot (m-1 \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

§. 150. Aufg. Die Anzahl der Kombinationen aus m Dingen ohne Wiederholungen zu suchen.

Aufl. 1) Jedes Ding gibt eine Union; m Dinge geben also m Unionen oder die Anzahl aller Unionen aus m Dingen ist = m.

2) Jedes der m Dinge kann mit den übrigen (m — 1) Dingen zu einer Ambe (Binion) verbunden werden. Dieß gäbe m . (m — 1) Amben, von welchen aber jede zweimal, nur versetzt, vorkäme, wie ab und ba; daher muß diese Anzahl durch 2 dividirt werden; dadurch erhält man die Anzahl aller Amben aus m Dingen $= \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$.

3) Wenn man jede Ambe mit den übrigen (m — 2) Dingen zu Ternen verbände, so erhielte man $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2}$ Ternen (Ternionen); aber jede würde dreimal vorkommen, wie abc, acb, bca. Diese Zahl muß daher durch 3 dividirt werden. Dadurch wird die Anzahl der Ternen $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

4) Durch die nämlichen Betrachtungen findet man die Anzahl aller Quaternen oder Quaternionen = $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

5) Und allgemein ist die Anzahl aller Gruppen zu n Dingen aus m Dingen ohne Wiederholungen = $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \ldots\ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n}$.

Beisp. Die gewöhnliche Lotterie hat 90 Nummern. In ihr sind also enthalten

90 einfache Auszüge,

$\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$ Amben,

$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$ Ternen,

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190 \text{ Quaternen,}$$

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268 \text{ Quinternen.}$$

Gezogen werden aber nur 5 Nummern. Diese geben nur 5 Auszüge, 10 Amben, 10 Ternen, 5 Quaternen und nur Eine Quinterne.

§. 151. Aufg. Die Anzahl aller Kombinationen aus m Dingen mit Wiederholungen zu bestimmen.

Aufl. 1) Wenn man jedes Ding mit allen, und noch einmal mit sich selbst verbände, so würde die Anzahl dieser Amben $= m \cdot (m+1)$ sein; aber jede würde doppelt vorkommen, wie aa und aa, ab und ba. Diese Anzahl muß daher durch 2 dividirt werden; dadurch erhält man die Anzahl aller Amben aus m Dingen mit Wiederholungen $= \frac{m \cdot (m+1)}{1 \cdot 2}$.

2) Jede Ambe, mit jedem Dinge und überdieß mit den beiden Dingen, die sie enthält, verbunden, gäbe $\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2)}{1 \cdot 2}$ Ternen, wo aber jede dreimal vorkommt, wie aaa, aaa, aaa; abc, acb, bca. Wenn man daher die Zahl noch mit 3 dividirt, so erhält man die Anzahl aller Ternen $= \frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

3) Auf gleiche Weise findet man die Anzahl aller Quaternen $= \frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

4) Und allgemein ist die Anzahl aller Gruppen zu n Dingen aus m Dingen mit Wiederholungen =

$$\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3) \ldots\ldots (m+(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n}$$

Beisp. Aus 5 Dingen lassen sich $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ Ternen (Ternionen) mit Wiederholungen machen.

§. 152. Aufg. Die Anzahl der Variationen von m Dingen für die Verbindungen nach n Dingen ohne Wiederholung zu finden.

Aufl. In den Variationen sollen alle Versetzungen aller Verbindungen dargestellt werden. Da nun aus m Dingen $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots\ldots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$ Verbindungen nach n Dingen genommen werden können und n Dinge sich $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n$mal versetzen lassen: so ist offenbar die Anzahl der Variationen von m Dingen für die Verbindungen nach n Dingen ohne Wiederholung $= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots\ldots (m-(n-1))$.

Beisp. Die Anzahl der Variationen von vier Dingen a, b, c, d zu zweien ohne Wiederholung ist $4 \cdot 3 = 12$, nämlich 1) ab, 2) ac, 3) ad, 4) ba, 5) bc, 6) bd, 7) ca, 8) cb, 9) cd, 10) da, 11) db und 12) dc.

§. 153. Aufg. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen zu bestimmen.

Aufl. 1) Zwei Dinge a und b geben folgende Variationen nach 2 Dingen: aa, ab, ba, bb; demnach ist die Anzahl der Variationen von 2 Dingen zu zweien $= 4 = 2^2$.

2) Drei Dinge a, b, c geben, wenn man zu zweien mit Wiederholungen variirt, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc; also ist die Anzahl dieser Variationen $= 9 = 3^2$.

Variirt man diese drei Dinge zu dreien, so hat man nur vor die $3 \cdot 3$ Variationen die 3 Dinge zu setzen; dadurch erhält man die Anzahl der Variationen $= 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$.

3) Es seien 4 Dinge zu variiren, und zwar erstlich zu zweien: so bemerkt man leicht, daß man $4 \cdot 4 = 4^2$ Variationen erhält.

Variirt man zu dreien, so muß man vor die vorigen $4 \cdot 4$ Variationen jedes Ding setzen; und da 4 Dinge gegeben sind, so wird die Anzahl der Variationen $= 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ sein.

Und wenn man zu vieren variirt, so darf man nur vor die $4 \cdot 4 \cdot 4$ Variationen jedes Ding von neuem schreiben; und weil dieß wegen der 4 gegebenen Dinge viermal geschehen kann, so ist die Anzahl der Variationen von 4 Dingen zu vieren $= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$.

4) Durch ähnliche Betrachtungen findet man die Anzahl der Variationen von 5 verschiedenen Dingen zu zweien $= 5^2$; zu dreien $= 5^3$; zu vieren $= 5^4$ u. s. w. Und allgemein ist die Anzahl der Variationen von m verschiedenen Dingen für die Verbindungen nach n Dingen mit Wiederholungen $= m^n$.

Beisp. Wie viel Würfe können mit 3 Würfeln gemacht werden? Die 6 Seitenflächen eines Würfels sind als 6 verschiedene Dinge zu betrachten; daher ist die Anzahl dieser Würfe $= 6^3 = 216$.

§. 154. Der beengte Raum gestattet nicht, die kombinatorischen Verrichtungen selbst bildlich darzustellen. Jedoch Eine Aufgabe möge hier Platz finden, nämlich: Zwei Dinge mit Wiederholungen zu variiren, und zwar nach folgender Auflösung:

1) Man schreibe die gegebenen Dinge a und b alphabetisch geordnet neben einander. Dieß gibt die erste Klasse oder die Unionen ('A).

2) Allen Unionen setze man nach und nach die gege-

benen Dinge vor, so erhält man die zweite Klasse oder sämmtliche Binionen ('B).

3) Das Nämliche thue man mit den Binionen, Ternionen u. s. w., so entstehen alle folgende Klassen bis ins Unendliche, wie folgende Darstellung zeigt:

Unionen	a	b	$'A = a + b$
Binionen	aa	ab	$'B = a^2 + 2ab + b^2$
	ba	bb	
Ternionen	aaa	aab	$'C = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	aba	abb	
	baa	bab	
	bba	bbb	
Quaternionen	aaaa	aaab	$'D = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + ab^4$
	aaba	aabb	
	abaa	abab	
	abba	abbb	
	baaa	baab	
	baba	babb	
	bbaa	bbab	
	bbba	bbbb	
	u. s. w.		

Zur Rechten des Gleichheitszeichens sieht man die Verbindungen ohne die Versetzungen, aber dafür die Versetzungszahlen der zwei gegebenen Dinge als Koëfficienten vorgesetzt. Das Gesetz, welches die beiden Dinge einhalten, springt in die Augen. Es ist ohne die Versetzungszahlen für Quinionen oder $'E = a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5$ und allgemein für Mtionen $= a^m, a^{m-1}b, a^{m-2}b^2, a^{m-3}b^3 \ldots\ldots a^2b^{m-2}, ab^{m-1}, b^m$. Die Versetzungszahlen nimmt man unmittelbar aus §. 149. und erhält vollständig und allgemein die Variationen mit Wiederholungen

zu Mtionen: $a^m + ma^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \ldots \, b^m$. Auch wird man bald bemerken, daß die Handlung des Variirens mit Wiederholungen und das Multipliciren völlig einerlei sind.

Zehntes Kapitel.

Der binomische Lehrsatz.

§. 155. Eine aus zwei Theilen zusammengesetzte Größe, wie $a + b$, wird ein Binomium genannt. Die entwickelte Darstellung eines Binomiums in jedweder Potenz heißt der binomische, auch Newton'sche Lehrsatz.

§. 156. Lehrs. Wenn $a + b$ ein Binomium darstellt und m den Exponenten bezeichnet, so ist allgemein

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} \cdot a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{m-4} b^4 + \ldots + b^m.$$

Bew. Der Ausdruck $(a + b)^m$ verlangt, daß das Binomium $a + b$ zur mten Potenz erhoben d. h. m mal als Faktor gesetzt und nun wirklich multiplicirt werde. Aber Multipliciren ist völlig einerlei mit Variiren mit Wiederholungen. Eine zweitheilige Größe zur Potenz m erheben ist also eben so viel als die Variationen mit Wiederholungen von zwei Dingen zu Mtionen darstellen.

Das Ergebniß davon entnehmen wir daher unmittelbar aus §. 154. und erhalten $(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}. a^{m-3} b^3 + \ldots\ldots b^m$.

§. 157. Zus. Wenn der zweite Theil b verneint ist, so wird in der allgemeinen Formel jedes Glied, welches den Theil b in einer ungeraden Potenz enthält, verneint und es ist

$$(a-b)^m = a^m - \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \ldots.$$

Eilftes Kapitel.

Von den Gleichungen.

§. 158. Ein Ausdruck, in welchem einerlei oder gleiche Größen nach ihrer verschiedenen Beziehung, Entstehung und Zusammensetzung auf verschiedene Weise dargestellt werden, heißt eine Gleichung. Z. B. $6.x - 8 = x + 52$. Die in einer Gleichung vorkommenden unbekannten Größen werden gewöhnlich mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet. Wenn nur Eine unbekannte Größe vorkommt, so heißt die Gleichung eine bestimmte. Eine Gleichung, welche nur die erste Potenz der unbekannten Größe enthält, wird eine einfache oder vom ersten Grade genannt; welche höhere Potenzen der unbekannten Größe enthält, eine höhere. Die höhern Gleichungen erhalten ihren Namen von dem Grade, welchen der Exponent der höchsten Potenz der unbekannten Größe angibt. Insbesondere heißen die vom zweiten Grade auch quadratische, die vom dritten kubische, die vom vierten biquadratische. Man theilt sie auch noch in reine, welche nur Eine Potenz der unbekannten Größe enthalten, und in gemischte oder zusammengesetzte, in welchen mehre Potenzen derselben vorkommen. Bekannte

Größen, welche mit den unbekannten multiplicirt werden, heißen **Koefficienten** der unbekannten.

§. 159. **Aufg.** Jede einfache bestimmte Gleichung aufzulösen.

Aufl. Sie ist aufgelöst, wenn die unbekannte Größe ganz allein auf der einen Seite des Gleichheitszeichens erscheint, die bekannten Größen aber auf der andern Seite sind; denn dadurch ist ja das Unbekannte durch das Bekannte ausgedrückt und somit selbst bekannt. Unter welcher Gestalt nun auch die gegebene Gleichung erscheinen mag: so arbeite man dahin, daß die unbekannte Größe durch gesetzliche Veränderungen (Einleit. §. 10. Nr. 5.) nach und nach von allen ihren Verbindungen befreiet wird. Jede Verbindung wird aber aufgelöst und verschwindet durch ihr Entgegengesetztes; Addition durch Subtraktion, Multiplikation durch Division u. s. w.

Beisp. 1) Es sei $\frac{5}{2} x = x + 18$. Man multiplicire die ganze Gleichung durch 2, so bekommt man $5x = 2x + 36$. Nun ziehe man auf beiden Seiten $2x$ ab, so erhält man $3x = 36$. Durch Division mit 3 entsteht endlich $x = 12$.

2) Aus $\frac{2}{3} x = \frac{4}{5} (99 - x)$ wird, wenn man zuerst mit 3 und dann mit 5 multiplicirt, $10x = 12 (99 - x)$. Rechter Hand schaffe man durch wirkliche Multiplikation das Einschließungszeichen weg, so wird $10x = 1188 - 12 . x$. Jetzt addire man zu beiden Seiten $12x$, so erhält man $22 . x = 1188$. Endlich dividire man durch 22, so wird $x = 54$.

3) Es sei allgemein $ax + b = cx + d$. Durch ähnliche Behandlungsweise entsteht zuerst $ax - cx + b = d$; dann $ax - cx = d - b$ oder $(a - c) x = d - b$; hieraus endlich $x = \frac{d - b}{a - c}$.

4) Aus $a^x = b$ wird durch Hilfe der Logarithmen $x . \log a = \log b$. Hieraus erhält man $x = \frac{\log b}{\log a}$.

§. 160. Um algebraische Aufgaben, welche die Art der Verbindung bekannter Größen mit unbekannten angeben,

aufzulösen, muß man vor Allem die Kunst sich aneignen, die durch Worte ausgedrückten Verbindungsweisen der Aufgabe durch arithmetische Zeichen auszudrücken. Sodann sucht und hebt man das in der Aufgabe angegebene Gleiche heraus oder macht das Ungleiche auf gesetzlichem Wege gleich und bildet dadurch eine Gleichung, welche vollends zu lösen ist. Nachdenken und Uebung müssen hiebei das Meiste thun.

Beisp. 1) Wenn man eine gewisse Zahl 12mal nimmt und dann 8 abzieht, so kommt eben so viel heraus, als wenn man dieselbe Zahl 9mal nimmt und dann noch 13 addirt. Welches ist jene Zahl? — Hier ist eine Gleichheit angegeben, und wenn man die unbekannte Zahl durch x bezeichnet, so geht aus den Angaben folgende Gleichung hervor

$$12 \cdot x - 8 = 9 \cdot x + 13 \text{ und } x = 7.$$

2) Eine Zahl hat folgende Beschaffenheit: wenn man ihr 15faches um 24 vermehrt, diesen Rest durch 4 dividirt: so kommt 9 weniger heraus, als ihr 5faches beträgt. Wie heißt diese Zahl? — Hier ist eine Ungleichheit angegeben; und die Grundgleichung ist

$$\frac{15 \cdot x + 24}{4} = 5 \cdot x - 9 \text{ und } x = 12.$$

3) Ein Schüler legte seinem Vater folgende Rechnung über das ihm zugeschickte Geld ab: $\frac{2}{5}$ des Geldes für Kost; $\frac{1}{7}$ desselben und 6 fl. für Wohnung und Holz; $\frac{1}{10}$ desselben weniger 9 fl. für Bücher; $\frac{1}{6}$ für eine Ferienreise; und nun habe ich noch 43 fl. Ueberschuß. Wie viel Geld hatte der Sohn erhalten? — Die Summe betrage x fl.; dann ist die Grundgleichung

$$x = \tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{7}x + 6 + \tfrac{1}{10}x - 9 + \tfrac{1}{6}x + 43$$

oder $x - \frac{2}{5}x - (\frac{1}{7}x + 6) - (\frac{1}{10}x - 9) - \frac{1}{6}x = 43.$

Man wird x = 210 fl. finden.

4) Um einen trägen Menschen zum Fleiße anzuspornen, wurde ihm versprochen, für jeden Tag der Arbeit 12 Kr. zu zahlen, wenn er für jeden Tag des Müssiggangs 15 Kr. zahlen wollte. Er ging den Vertrag ein; und am Ende des Jahrs wurden ihm 34 fl. 45 Kr. hinausgezahlt. Wie viel Tage hat dieser Mensch gearbeitet, und wie viele gefeiert? — Die Tage der Arbeit seien x; so sind die des Nichtsthuns 365 — x. Und es entsteht folgende Grundgleichung

$$\tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{4}(365 - x) = 34\tfrac{3}{4}.$$

Hieraus findet man x = 280 Tage Arbeit; folglich 365 — 280 = 85 Tage Müssiggang.

5) Ein Bote A macht täglich 4 Meilen. Nachdem er schon 8 Tage weg ist, wird ihm ein anderer B, der täglich 6 Meilen macht, nachgeschickt. Wann wird B den A einholen? — Es geschehe in x Tagen. Alsdann macht A in Allem $8 + x$ Tage und $4(8 + x)$ Meilen, und B macht $6 \cdot x$ Meilen. Beider Boten Weg muß gleich sein. Demnach ist

$$6 \cdot x = 4 \cdot (8 + x) \text{ und } x = 16 \text{ Tagen.}$$

6) Eine Zahl x zu finden, welche mit a multiplicirt um c zuviel, aber mit b multiplicirt um d zuwenig gibt. — Hienach ist $ax - c = bx + d$ und hieraus $x = \frac{c + d}{a - b}$.

§. 161. Aufg. Einfache Gleichungen mit mehren unbekannten Größen aufzulösen, wenn so viele Gleichungen gegeben sind, als unbekannte Größen vorkommen.

Aufl. Wir fangen mit zwei Gleichungen an. Für ihre Auflösung gibt es verschiedene Weisen: 1) Man suche in jeder der beiden Gleichungen den Werth der nämlichen unbekannten Größe (indem man die andere einstweilen wie eine bekannte behandelt) und setze diese Werthe einander gleich. Dadurch erhält man eine neue Gleichung, worin nur noch die andere unbekannte Größe enthalten ist, welche dann auf bekannte Weise gefunden wird. Diesen Werth der andern unbekannten Größe setze man anstatt derselben in einer der gegebenen Gleichungen, so findet man auch den Werth der ersten unbekannten Größe. Z. B. Es sei

1) $3 \cdot x + 7 \cdot y = 52$ und 2) $5 \cdot x + 2 \cdot y = 48$.

Aus 1) wird $x = \frac{52 - 7 \cdot y}{3}$ und aus 2) wird $x = \frac{48 - 2y}{5}$.

Demnach $\frac{52 - 7y}{3} = \frac{48 - 2y}{5}$ und hieraus $y = 4$. Wenn man diesen Werth von y in einer der vorhergehenden Gleichung setzt, so findet man auch x; nämlich $x = \frac{52 - 7 \cdot 4}{3}$ $= 8$ oder $x = \frac{48 - 2 \cdot 4}{5} = 8$.

2) Man kann auch so verfahren, daß man zuerst aus einer Gleichung den Werth der einen unbekannten Größe sucht, und diesen dann für sie in der zweiten Gleichung setzt; so enthält diese nur noch Eine unbekannte Größe, die man auf bekannte Weise entwickelt und ihren Werth

in der ersten Gleichung setzt. Man wird die nämlichen Ergebnisse finden. Z. B. in den vorigen Gleichungen findet man aus 1) den Werth von $x = \frac{52 - 7 . y}{3}$. Diesen Werth von x setze man in 2) für x; so wird $5 . \frac{52 - 7 . y}{3} + 2 y = 48$. Und hieraus $y = 4$. Jetzt findet man auch noch x wie vorhin.

3) Die dritte Weise besteht darin, daß man durch Multiplikation der Gleichungen eine und dieselbe unbekannte Größe, welche man eben wegschaffen will, in beiden Gleichungen gleich groß macht und diese dann von einander abzieht oder sie addirt, je nachdem die Werthe der gleichen Größe gleichnahmig oder entgegengesetzt sind. Z. B. von den vorigen Gleichungen multiplicire man die erste mit 5 und die andere mit 3. Dann erhält man

$$15 x + 35 y = 260$$
$$15 x + 6 y = 144$$

$29 . y = 116$ und $y = 4$. Jetzt wird man auch $x = 8$ wie vorhin ohne Anstand finden.

Wenn drei oder mehr Gleichungen mit eben so viel unbekannten Größen gegeben sind, so verfährt man auf ähnliche Weise. Z. B. aus

1) $4x + 2y + 5z = 35$
2) $7x + y + 6z = 33$
3) $12x - 2y + 4z = 8$

findet man $x = 1$; $y = 8$ und $z = 3$.

Nun löse man auch folgende Aufgaben auf. 1) Auf einem Getreideboden liegen zweierlei Getreidearten, Roggen und Weitzen. Auf dem obern Boden liegen 40 Scheffel Roggen und 25 Scheffel Weitzen; auf dem untern liegen 50 Scheffel Roggen und 30 Scheffel Weitzen. Der Werth des Getreides auf dem obern Boden ist 775 fl. und der auf dem untern ist 950 fl. Wie hoch ist der Scheffel von jeder Getreideart gerechnet? — Wenn der Scheffel Roggen zu x fl. und der Scheffel Weitzen zu y fl. gerechnet wird, so ist

1) $40 . x + 25 . y = 775$ und 2) $50 . x + 30 . y = 950$.

Daraus wird man $x = 10$ fl. und $y = 15$ fl. finden.

2) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe S und deren Differenz D ist. — Wenn x die größere und y die kleinere Zahl bezeichnet, so ist hier

$$1)\ x + y = S \quad \text{und} \quad 2)\ x - y = D.$$

Hieraus findet man $x = \frac{S + D}{2}$ und $y = \frac{S - D}{2}$.

3) Jemand hat 14löthiges und 9löthiges Silber. Er will daraus eine Mischung von 12löthigem Silber machen, welche 4 Mark (zu 16 Loth) wiegen soll. Wie viel Lothe muß er von jeder Sorte nehmen? — Die Anzahl Lothe des 14löthigen Silbers sei x und die des 9löthigen sei y. Dann ist offenbar

$1)\ x + y = 16.4 = 64$ und $2)\ 14.x + 9.y = 12.64 = 768$. Man wird $x = 38\frac{2}{5}$ Loth und $y = 25\frac{3}{5}$ Loth finden.

4) Die Krone des Königs Hiero von Syrakus war 20 Pfund schwer und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund am Gewichte. Wenn sie nun aus Gold und Silber bestand, und 19,6 Pf. Gold im Wasser 1 Pfund, und 10,5 Pf. Silber im Wasser gleichfalls 1 Pfund verlieren: wie viel Gold und Silber mußte diese Krone enthalten? — Sie enthalte x Pf. Gold und 9 Pf. Silber, so ist

$$1)\ x + y = 20 \quad \text{und} \quad 2)\ \frac{x}{19{,}6} + \frac{y}{10{,}5} = \frac{5}{4}.$$

Man findet $x = 14{,}81\ldots$ Pf. Gold und $y = 5{,}19\ldots$ Pf. Silber.

5) A und B besitzen mit einander 20 Thlr.; A und C 15 Thlr. und B und C 21 Thlr. Wie viel ein Jeder? — A habe x, B y und C z Thlr., so ist $1)\ x + y = 20$; $2)\ x + z = 15$ und $3)\ y + z = 21$. Hieraus wird $x = 7$ Thlr.; $y = 13$ Thlr. und $z = 8$ Thlr.

§. 162. Aufg. Jede reine höhere Gleichung aufzulösen.

Aufl. Ihre allgemeine Form ist $x^m = P$. Durch Ausziehung der mten Wurzel entsteht aber $x = \sqrt[m]{P}$.

Beisp. Wenn man zu dem Quadrate einer Zahl noch den vierten Theil desselben addirt und diese Summe mit dem Würfel (Kubus) dieser Zahl multiplicirt, so kommt die Zahl 40960. Welches ist jene Zahl? Hier ist $(x^2 + \frac{1}{4}x^2).x^3 = 40960$ und $x = 8$.

§. 163. Aufg. Jede quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Ihr allgemeiner Ausdruck ist $x^2 + ax = b$ wo a und b bejahte oder verneinte Größen sein können. Um linker Hand ein vollständiges Quadrat zu erhalten und dar-

aus die Quadratwurzel wirklich ziehen zu können, addire man auf beiden Seiten $\frac{1}{4}a^2$. Dann erhält man $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b$ oder $(x + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b$. Nun ziehe man auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so ist $x + \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)}$ und $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)}$
$= \frac{-a \pm \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2}$.
Wegen des doppelten Zeichens vor der Wurzelgröße (§. 100.) hat jede quadratische Gleichung zwei Werthe für x. Wenn b verneint und größer als $\frac{1}{4}a^2$ ist, so sind beide Werthe von x unmöglich (§. 101.).

Wenn eine Gleichung die Form $x^{2m} + ax^m = b$ hat, so kann sie nach Art der quadratischen Gleichungen aufgelöset werden. Denn man setze $x^m = z$, so hat man $z^2 + az = b$ und $z = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)}$; mithin $x = \sqrt[m]{[-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b)}]}$.

Beisp. 1) Die Gleichung $x(36 - x) = 315$ sieht geordnet also aus: $x^2 - 36x = -315$. Hier ist also $a = -36$ und $b = -315$; demnach $x = 18 \pm \sqrt{(324 - 315)}$ $= 18 \pm 3$ d. h. $x = 21$ und $x = 15$. Beide Werthe thun der Gleichung Genüge, und in wirklichen Fällen entscheiden die Umstände die Wahl.

2) Es sei $x^2 + 40 . x = 969$; so ist hier $a = 40$ und $b = 969$. Demnach ist $x = -20 \pm \sqrt{(400 + 969)}$ $= -20 \pm 37$ d. h. $x = 17$ und $x = -57$.

3) Wenn $x^2 - 12x = -40$ ist, so wird $x = 6 \pm \sqrt{(36 - 40)} = 6 \pm \sqrt{-4}$ d. h. x ist hier eine unmögliche Größe.

4) Wenn man zwei Zahlen, von welchen die eine um 9 größer als die andere ist, mit einander multiplicirt, so kommt die Zahl 322 heraus. Welches sind jene zwei Zahlen? — Wenn man die kleinere mit x bezeichnet, so ist die größere $x + 9$. Die Grundgleichung ist dann $x^2 + 9x = 322$ und $x = 14$ die kleinere Zahl; folglich die größere 23.

5) An einer Sache, welche für $62\frac{1}{2}$ fl. verkauft wurde, gewann man halb so viel Procent, als sie im Einkaufe ge-

kostet hatte. Für wie viel Gulden wurde sie eingekauft? — Der Einkaufspreis sei x Gulden: so ist

$$100 : x = \frac{x}{2} : \left(\frac{x^2}{200} = \text{Gewinn}\right). \text{ Daher } \frac{x^2}{200} = 62{,}5 - x$$

und $x^2 + 200 \cdot x = 12500$. Hieraus $x = 50$ fl. Einkauf.

6) Eine jede Zahl (a) in zwei ungleiche Theile so zu theilen, daß der größere Theil die mittlere Proportionalzahl zwischen der ganzen Zahl und dem kleinern Theile sei. — Es sei x der größere Theil, so ist $a - x$ der kleinere. Nun soll folgende Proportion Statt finden $a : x = x : a - x$. Hieraus ist $x^2 = a^2 - ax$ oder $x^2 + ax = a^2$ und $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + a^2)} = a \cdot 0{,}6180339 \ldots\ldots$

§. 164. Für Gleichungen, die den zweiten Grad übersteigen, hat man bis jetzt keine allgemeinen und brauchbaren Auflösungen. Indessen ist es eine neue teutsche Erfindung, jede höhere Zahlengleichung aufzulösen. Damit wollen wir uns hier noch bekannt machen; zuvor aber noch einige Betrachtungen über die höhern Gleichungen anstellen.

§. 165. Wir haben gesehen, daß jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat, die wir allgemein a und b nennen wollen; oder es sei 1) $x = a$ und 2) $x = b$; so ist auch $x - a = 0$ und $x - b = 0$. Solche Ausdrücke, wie $x - a$, $x - b$, nennt man einfache oder Wurzel-Faktoren. Wenn man diese zwei einfachen Faktoren mit einander multiplicirt, so erhält man

$$(x - a) \cdot (x - b) = x^2 - (a + b)\, x + ab = 0.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der allgemeinen Form $x^2 + Ax + P = 0$ der quadratischen Gleichung, so ist $A = -(a + b$ und $P = ab$.

Multiplicirt man die quadratische Gleichung noch mit einem dritten Faktor $x - c = 0$, welcher $x = c$ voraussetzt, so bekommt man $(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) = x^3 - (a + b + c)\, x^2 + (ab + ac + bc)\, x - abc = 0$.

Und dieser Ausdruck stimmt mit der allgemeinen Form der kubischen Gleichung überein, welche ist $x^3 + Ax^2 + Bx + P = 0$, so daß jetzt $A = -(a + b + c)$, $B = ab + ac + bc$ und $P = -abc$ ist; woraus hervorgeht, daß

jede kubische Gleichung drei Wurzeln 1) $x = a$, 2) $x = b$ und 3) $x = c$ hat.

Durch Multiplikation eines neuen Faktors $x - d = 0$ in die vorige kubische Gleichung entsteht

$$x^4 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +ad \\ +bc \\ +bd \\ +cd \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} -abc \\ -abd \\ -acd \\ -bcd \end{matrix}\right\} x + abcd = 0$$

was mit der allgemeinen Form der Gleichungen des vierten Grades $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + P = 0$ zusammenstimmt, so daß ist

$A = -(a + b + c + d)$

$B = ab + ac + ad + bc + bd + cd$

$C = -(abc + abd + acd + bcd)$

$P = abcd.$

Die Gleichungen des vierten Grades haben also vier Wurzeln. Und wenn man in dieser Betrachtung fortfährt, so wird man auf das Ergebniß kommen, daß eine jede Gleichung vom fünften Grade fünf Wurzeln, und überhaupt eine Gleichung vom mten Grade m Wurzeln habe. Und diese Wurzeln einer höhern Gleichung, deren Koefficienten alle wirkliche Größen sind, können ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte, vollständige oder unvollständige, ja selbst unmögliche Größen sein.

§. 166. Betrachten wir das Verhalten der Wurzeln der höhern Gleichungen gegen ihre Koefficienten, so ergibt sich, wenn man die Wurzeln mit ihrem entgegengesetzten Zeichen nimmt, Folgendes:

Der Koefficient A des zweiten Gliedes ist die Summe aller Wurzeln;

Der Koefficient B des dritten Gliedes ist die Summe aller Amben aus den Wurzeln;

= = C des vierten Gliedes ist die Summe aller Ternen

u. s. w.

das letzte Glied (P = abcd...) ist immer das Produkt aller Wurzeln der Gleichung.

§. 167. In einer geordneten Gleichung heißen zwei auf einander folgende Glieder mit einerlei Zeichen eine Folge, und zwei dergleichen mit verschiedenen Zeichen eine Abwechselung.

Ein Produkt $(x-a).(x-b).(x-c)\ldots = 0$ gibt eine höhere Gleichung mit lauter Abwechselungen; dagegen ein Produkt $(x+a).(x+b).(x+c)\ldots = 0$ gibt eine höhere Gleichung mit lauter Folgen. Im ersten Falle sind alle Wurzeln bejaht; im letztern alle verneint. Daraus geht hervor, daß eine vollständige geordnete Gleichung mit lauter Abwechselungen lauter bejahte, dagegen eine dergleichen mit lauter Folgen lauter verneinte Wurzeln hat. Weitere Betrachtungen, welche aber hier zu verwickelt werden, lehren, daß jede Abwechselung auf eine bejahte, und jede Folge auf eine verneinte Wurzel deutet, und daß also in jeder solchen Gleichung so viele bejahte Wurzeln als Abwechselungen, und so viele verneinte Wurzeln als Folgen vorhanden sind.

§. 168. Aufg. Jede höhere numerische oder Zahlengleichung aufzulösen.

Aufl. Die reellen Wurzeln der Gleichung können ganze und gebrochene Zahlen sein, welche letztere als Decimalbrüche vollständig oder unvollständig sind. Die ganzen Wurzeln werden dadurch gefunden, daß man das letzte Glied, weil es das Produkt aller Wurzeln ist, in seine Faktoren zerlegt, und nun versucht, welche der Gleichung Genüge thun d. h.

dieselbe auf Null bringen. Diejenigen Faktoren, welche dieses thun, sind der Gleichung Wurzeln, welche theils bejaht theils verneint sein können nach den vorkommenden Abwechselungen und Folgen. Z. B. Es sei

$$x^3 + 6x^2 - 9x - 14 = 0$$

Die zwei Folgen und eine Abwechselung geben zu erkennen, daß die Gleichung zwei verneinte und eine bejahte Wurzel hat. Die Faktoren des letzten Gliedes sind $+1$, -1, $+2$, -2, $+7$, -7, $+14$, -14, unter welchen die drei Wurzeln sind 1) $x = -1$; 2) $x = 2$; und 3) $x = -7$. Da jede höhere Gleichung durch die Multiplikation mit einem Wurzelfaktor um eine Potenz höher steigt, so muß umgekehrt eine solche Gleichung durch die Division mit einem Wurzelfaktor um einen Grad herabsteigen. So wird die vorige kubische Gleichung durch die Division mit $x + 1$ oder $x - 2$ oder endlich $x + 7$ in eine quadratische verwandelt, aus der die zwei andern Wurzeln nach bekannter Weise auch noch gefunden werden können.

Aber da seltener die Wurzeln reine ganze Zahlen sind, so löset man für jeden Fall die höhern Gleichungen nach Art der gewöhnlichen Wurzelziehungen auf, indem man auch hier die Wurzel aus zwei Theilen zusammengesetzt sich denkt, und darnach die vorgegebene Gleichung umändert. Die allgemeine Form z. B. einer kubischen Gleichung ist

$$x^3 + Ax^2 + Bx = P$$

Man setze $x = a + b$ als die zwei Theile der Wurzel, so ist

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

$$Ax^2 = A(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$Bx = B(a + b)$$

$$P = P.$$

Die anfängliche Gleichung verwandelt sich nun, wenn man nach den Potenzen von b ordnet, in diese

$$(a^3 + Aa^2 + Ba) + (3a^2 + 2Aa + B)b + (3a + A)b^2 + b^3 = P$$

Wenn eine Gleichung unvollständig ist, so denkt man sich die fehlenden Theile als Potenzen von x mit dem Koefficienten Null; wodurch dann in der Formel alle diejenigen Theile und Glieder wegfallen, welche den Koefficienten Null erhalten sollten. Kommen unter den Gliedern verneinte vor, so hat dieß natürlich blos auf die verneinten Koefficienten der verneinten Glieder Einfluß. Das Verfahren selbst wird man am leichtesten aus Beispielen begreifen. Es soll folgende Gleichung aufgelöset werden:

$$x^3 - 11{,}1424\,x = -4{,}39296.$$

Hier fehlt das zweite Glied mit x^2 d. h. hier ist $A = 0$ und darum verwandelt sich die vorige allgemeine Formel in diese

$$(a^3 + Ba) + (3a^2 + B)b + 3ab^2 + b^3 = P$$

wo $B = -11{,}1424$ und $P = -4{,}39296$ ist. Die Rechnung wird nun, weil x 1) zwischen 0 und 1; 2) zwischen 3 und 4; endlich 3) zwischen -3 und -4 fällt, also geführt:

$$-4{,}39296 \quad (0{,}4 \text{ erste Wurzel.}$$

$$a^3 + B \,.\, a = \underline{-4{,}39296}$$

$$*$$

Hier ist also kein zweiter Theil der Wurzel vorhanden oder 0,4 ist schon die volle Wurzel. Nun haben wir aber noch die zwei andern Wurzeln zu suchen.

$$-\,4{,}30296 \quad (3{,}12 \text{ zweite Wurzel.}$$

$$a^3 + B\,.\,a = -\,6{,}42720$$

$$2{,}03424$$

$$(3a^2 + B = 15{,}8576)$$

$$\left.\begin{array}{r} (3a^2 + B)\,b = 1{,}58576 \\ 3ab^2 = 0{,}09 \\ b^3 = 0{,}001 \end{array}\right\}$$

$$1{,}67676$$

$$0{,}35748$$

$$(3a^2 + B = 17{,}6876)$$

$$\left.\begin{array}{r} (3a^2 + B)\,b = 0{,}353752 \\ 3ab^2 = 0{,}00372 \\ b^3 = 0{,}000008 \end{array}\right\}$$

$$0{,}357480$$

*

$$-\,4{,}30296 \quad (-\,3{,}52 \text{ dritte Wurzel.}$$

$$a^3 + Ba = +\,6{,}42720$$

$$-\,10{,}82016$$

$$(3a^2 + B = 15{,}8576)$$

$$\left.\begin{array}{r} (3a^2 + B)b = -\,7{,}92880 \\ 3ab^2 = -\,2{,}25 \\ b^3 = -\,0{,}125 \end{array}\right\}$$

$$-\,10{,}30380$$

$$-\,0{,}51636$$

$$(3a^2 + B = -\,25{,}6076)$$

$$\left.\begin{array}{r} (3a^2 + B)b = -\,0{,}512152 \\ 3ab^2 = -\,0{,}00420 \\ b^3 = -\,0{,}000008 \end{array}\right\}$$

$$-\,0{,}516360$$

*

Jede Gleichung vom 4ten Grade wird unter der allgemeinen Form vorgestellt:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = P$$

Die zwei Theile jeder Wurzel x drücke man wieder durch $a + b$ aus, so ist

$$x^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$Ax^3 = A(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$
$$Bx^2 = B(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$Cx = C(a + b)$$
$$P = P$$

Man ordne nun die Glieder nach den Potenzen von b, und es entsteht folgende neue Gleichung:

$$(a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca) + (4a^3 + 3Aa^2 + 2Ba + C)b + (6a^2 + 3Aa + B)b^2 + (4a + A)b^3 + b^4 = P.$$

Beisp. Es sei die Gleichung $x^4 - 16x = 12$ aufzulösen. Hier ist $A = 0$ und $B = 0$. Daher vereinfacht sich die letzte allgemeine Gleichung also:

$$(a^4 + Ca) + (4a^3 + C)b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = P$$

worin $C = -16$ und $P = 12$ ist. Nun geht die Rechnung, mit Weglassung der Divisoren zum jedesmaligen Finden des zweiten Wurzeltheiles b und mit Beseitigung der allgemeinen Glieder, also vor sich:

+ 12 (2,73 ....
— 16
28,0000
11,2
11,76
2,744
0,2401
2,05590000
1,88196
0,039366
0,0002916
0,00000081
0,13428159

Die zweite Wurzel fällt zwischen — 1 und — 0,1; und die beiden übrigen Werthe von x sind unmöglich. Vgl. Dr. Bauer's Entwickelung aller möglichen Wurzeln der bestimmten numerischen Gleichungen jedes Grades. 2. Aufl. Berl. 1825.

Zwölftes Kapitel.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 169. Eine Reihe (Progression) ist eine Folge von Größen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortgehen. Sie ist steigend, wenn die Größen, welche Glieder heißen, immer wachsen; fallend, wenn sie abnehmen. Eine Reihe, in welcher die Glieder nach gleichen Differenzen fortgehen, heißt eine arithmetische Reihe. Ihre allgemeine Form von n Gliedern ist

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \ldots\ldots\ a+(n-1)d$

wo a das erste Glied und d die Differenz, die sowohl bejaht als verneint sein kann, bedeutet. Der Ausdruck $a+(n-1)d$ ist das allgemeine Glied der Reihe

§. 170. Wenn man das letzte Glied durch z bezeichnet, so ist offenbar

$$z = a + (n - 1)d.$$

§. 171. Die Summe des ersten und letzten Gliedes ist $a + a + (n - 1)d = 2a + (n - 1)d$; die Summe des zweiten und vorletzten $(a + d) + (a + (n - 2)d) = 2a + (n - 1)d$; eben so die Summe des dritten und drittletzten $= 2a + (n - 1)d$ u. s. w. Daraus geht hervor, daß in jeder arithmetischen Reihe die Summe der beiden äußersten Glieder gleich ist der Summe zweier von den äußersten gleichweit abstehender Glieder, und bei einer ungeraden Anzahl der Glieder dem mittelsten doppelt genommen. Wenn man daher die Summe aller Glieder mit S bezeichnet, so ist

$$S = \tfrac{1}{2} n (a + z) = \tfrac{1}{2} n (2a + (n - 1)d).$$

§. 172. Aus diesen zwei Grundgleichungen für z und S lassen sich die übrigen möglichen Formeln, welche hieher gehören, ableiten. Wir wollen sie mit den schon gefundenen nach ihrem Ergebniß in einer Uebersicht beifügen.

Nr.	Zu suchen	Gegeben	Formeln.
1	a	d, n, z	$z - (n - 1)d$
2		n, z, S	$\frac{2S - nz}{n}$ oder $\frac{2S}{n} - z$
3		d, n, S	$\frac{S}{n} - \frac{(n - 1)d}{2}$
4		d, z, S	$\frac{1}{2}d \pm \sqrt{[(z + \frac{1}{2}d)^2 - 2dS]}$
5	z	a, d, n	$a + (n - 1)d$
6		a, n, S	$\frac{2S}{n} - a$
7		d, n, S	$\frac{S}{n} + \frac{(n - 1)d}{2}$
8		a, d, S	$-\frac{1}{2}d + \sqrt{(2dS + (a - \frac{1}{2}d)^2)}$

Nr.	Zu suchen	Gegeben	Formeln.
9	d	a, z, S	$\frac{z^2 - a^2}{2S - a - n}$
10	d	a, n, S	$\frac{2(S - an)}{n(n-1)}$
11	d	z, n, S	$\frac{2(zn - S)}{n(n-1)}$
12	d	a, z, n	$\frac{z - a}{n - 1}$
13	n	a, d, z	$\frac{z - a}{d} + 1$
14	n	a, z, S	$\frac{2S}{a + z}$
15	n	d, z, S	$\frac{2z + d \pm \sqrt{[(2z+d)^2 - 8dS]}}{2d}$
16	n	a, d, S	$\frac{d - 2a \pm \sqrt{[8dS + (2a-d)^2]}}{2d}$
17	S	a, n, z	$(a+z) \cdot \frac{n}{2}$
18	S	a, d, n	$\frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1)d)$
19	S	a, d, z	$\frac{(a+z) \cdot (d+z-a)}{2d}$
20	S	d, n, z	$(2z - (n-1) \cdot d) \cdot \frac{n}{2}$

§. 173. Eine Reihe, in welcher die Glieder in einem unveränderlichen geometrischen Verhältnisse auf einander folgen, ist eine **geometrische Reihe**. Für n Glieder ist daher die allgemeine Form derselben

$$a,\ ea,\ e^2 a,\ e^3 a,\ e^4 a \ldots\ldots e^{n-1} a$$

wo a das erste Glied und e der Exponent der Reihe ist. Ist dieser größer als 1, so ist die Reihe steigend; ist er aber ein ächter Bruch, so ist sie fallend. Der Ausdruck $e^{n-1}a$ ist das allgemeine Glied.

§. 174. Es bedeute z das letzte Glied, so ist offenbar

$$z = e^{n-1}a$$

§. 175. Wenn S die Summe der Glieder bezeichnet, so ist

$$S = a + ea + e^2a + e^3a \ldots\ldots + e^{n-1}a$$

$$eS = \quad ea + e^2a + e^3a \ldots\ldots + e^{n-1}a + e^na$$

$$eS - S = e^na - a$$

$$(e-1)S = e^na - a$$

und $S = \dfrac{e^na - a}{e - 1}$

wenn die Reihe steigend ist. Ist sie aber fallend, d. h. e ein ächter Bruch, so ist eS kleiner als S und wird von S abgezogen; dann erhält man $S = \dfrac{a - e^na}{1 - e}$.

§. 176. Aus den zwei Grundgleichungen für z und S lassen sich die übrigen hieher gehörigen möglichen Formeln herleiten, welche mit diesen beiden hier in eine allgemeine Uebersicht gebracht werden sollen.

Nr.	Zu suchen	Gegeben	Formeln.
1	a	e, n, z	$\frac{z}{e^{n-1}}$
2	a	e, n, S	$\frac{(e-1)S}{e^{n}-1}$
3	a	e, z, S	$S+e.(z-S)$ oder $ez-(e-1)S$
4	a	n, z, S	$a(S-a)^{n-1}-z(S-z)^{n-1}=0$
5	z	a, e, n	$e^{n-1}a$
6	z	a, e, S	$\frac{(e-1)S+a}{e}$
7	z	e, n, S	$\frac{e^{n-1}.(e-1)S}{e^{n}-1}$
8	z	a, n, S	$z(S-z)^{n-1}-a(S-a)^{n-1}=0$
9	e	a, z, S	$\frac{S-a}{S-z}$
10	e	a, n, z	$\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$
11	e	a, n, S	$e^{n}-\frac{eS}{a}+\frac{S-a}{a}=0$
12	e	n, z, S	$e^{n}-\frac{S}{S-z}.e^{n-1}+\frac{z}{S-z}=0$
13	n	a, e, z	$\frac{\log z-\log a}{\log e}+1$
14	n	a, e, S	$\frac{\log((e-1)S+a)-\log a}{\log e}$
15	n	a, z, S	$\frac{\log z-\log a}{\log(S-a)-\log(S-z)}+1$
16	n	e, z, S	$\frac{\log z-\log(S+ez-eS)}{\log e}+1$

Nr.	Zu suchen	Gegeben	Formeln.
17	S	a, e, n	$\frac{e^n . a - a}{e - a}$
18		a, e, z	$\frac{ez - a}{e - 1}$
19		a, z, n	$\frac{z . \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}}{\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - 1}$
20		e, n, z	$\frac{ez - \frac{z}{e^{n-1}}}{e - 1}$

§. 177. Wenn ein Kapital K zu x Procent ausgeliehen wird und die Zinsen jedesmal wieder zum Kapital geschlagen d. h. Zinseszinsen benützt werden, so wird aus K am Ende des

1ten Jahres $K + 0,01 . x . K = (1 + 0,01 . x) . K = K'$

2ten Jahres $(1 + 0,01 . x) . K' = (1 + 0,01 . x)^2 . K = K''$

3ten Jahres $(1 + 0,01 . x) . K'' = (1 + 0,01 . x)^3 . K = K'''$

.

.

.

nten Jahres . . . . $(1 + 0,01 . x)^n . K$

Bezeichnet man das auf solche Weise am Ende des nten Jahres entstandene Kapital mit W, so wird

1) $W = (1 + 0,01 . x)^n . K$

oder, wenn man den Vergrößerungsexponenten $1 + 0,01 . x = e$ setzt,

2) $W = e^n . K$

Daraus findet man weiter

$$3)\ K = \frac{W}{e^n}$$

$$4)\ e = \sqrt[n]{\frac{W}{K}}$$

$$5)\ x = \left(\left(\sqrt[n]{\frac{W}{K}}\right) - 1\right) . 100$$

$$6)\ n = \frac{\log W - \log K}{\log e}$$

Es leuchtet übrigens ein, daß die vorstehenden Sätze von allen Größen gelten, welche jährlich um einen bestimmten aliquoten Theil zunehmen, z. B. Wälder, Volksmenge.

§. 178. Der Unterschied W — K heißt das Interusurium oder der Rabatt. Bezeichnet man ihn durch R, so ist bei Zinseszinsen

$$1)\ R = W - K = e^n K - K = (e^n - 1) K$$

oder $$2)\ R = W - \frac{W}{e^n} = \frac{e^n - 1}{e^n} . W$$

§. 179. Wenn von einem auf Zinseszins angelegten Kapital am Ende eines jeden Jahres die unveränderliche Summe p weggenommen wird, so hat man am Ende des 1sten Jahres $e . K - p$

2ten " $e . (e K - p) - p = e^2 K - e p - p$

3ten " $e . (e^2 K - e p - p) - p = e^3 K - e^2 p - e p - p$

4ten " $e^4 K - e^3 p - e^2 p - e p - p$

.

.

.

nten " $e^n K - e^{n-1} p - e^{n-2} p \ldots - p$

demnach

$$1)\ W = e^n K - (1 + e + e^2 + e^3 + e^{n-1})p$$

$$= e^n K - \frac{e^n - 1}{e - 1} \cdot p$$

daraus geht weiter hervor

$$2)\ K = \frac{(e-1)W + (e^n - 1)p}{(e-1) \cdot e^n}$$

$$3)\ p = \frac{(e^n \cdot K - W) \cdot (e-1)}{e^n - 1}$$

$$4)\ n = \frac{\log((e-1)W - p) - \log((e-1)K - p)}{\log e}$$

Anstatt p wegzunehmen kann man auch p hinzufügen. Alsdann darf man in vorstehenden Ausdrücken nur $+p$ anstatt $-p$ schreiben.

§. 180. Die wegzunehmende Summe p kann aber die einjährigen Zinsen übersteigen. Da wird W endlich kleiner als K, ja nach gewissen Jahren $W = 0$ werden. Für einen solchen Fall erhält man

$$1)\ K = \frac{(e^n - 1)p}{(e-1) \cdot e^n}$$

$$2)\ p = \frac{e^n \cdot K(e-1)}{e^n - 1}$$

$$3)\ n = \frac{\log p - \log(p - (e-1) \cdot K)}{\log e}.$$

Geometrie.

§. 1. Die Geometrie ist die Wissenschaft von dem räumlichen Ausgedehnten oder Stetigen, von der Gestalt und Größe desselben, so wie von der Lage und Verbindung seiner Theile.

§. 2. Der Punkt ist das Einfache (Untheilbare) und Gestaltlose. Unter Gestalt aber ist zu denken die bestimmte Ordnungsart der Theile einer Größe in ihrem Nebensein.

§. 3. Die Linie ist das nach Einer Richtung Ausgedehnte. Die Ausdehnung nach einer Richtung heißt die Länge. Man kann daher auch sagen: die Linie ist das blos nach der Länge Ausgedehnte oder die Linie hat blos Länge. Ihre Grenzen sind Punkte.

§. 4. Die Fläche ist das nach zwei verschiedenen Richtungen Ausgedehnte. Die zweite, von der ersten verschiedene Richtung nennt man die Breite. Eine Fläche hat also Länge und Breite, und wird von Linien begrenzt.

§. 5. Der Körper ist das nach drei verschiedenen Richtungen Ausgedehnte. Die dritte Ausdehnung, welche hier noch hinzukommt, heißt zum Unterschiede der andern die Höhe, Tiefe oder auch Dicke. Ein Körper ist demnach lang, breit und dick (hoch, tief) und hat Flächen zu Grenzen.

§. 6. Eine gerade Linie ist diejenige, welche in ihrer Ausdehnung stets einerlei Richtung behält; eine krumme aber diejenige, welche ihre Richtung beständig ändert.

§. 7. Eine ebene Fläche oder Ebene ist diejenige, in welcher man nach allen möglichen Richtungen gerade Linien ziehen kann; eine krumme ist diejenige,

in welcher entweder nach gar keiner Richtung oder höchstens nur nach einer oder der andern Richtung gerade Linien gezogen werden können.

§. 8. Die Körper sind entweder von lauter ebenen oder von krummen oder von ebenen und krummen Flächen zugleich begrenzt.

§. 9. Es lassen sich ohne Anstand folgende Anforderungen machen:

1) Durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie zu ziehen.

2) Eine gerade Linie auf beiden Seiten nach Belieben zu verlängern.

3) Eine gerade Linie einer gegebenen gleich zu machen.

4) Von einer geraden Linie eine gerade kleinere wegzunehmen.

§. 10. Mit den erwähnten Linien, Flächen und Körpern beschäftigt sich die Geometrie. Man könnte sie daher in drei Theile theilen. Da aber die gerade Linie für sich allein zu wenig Stoff für geometrische Betrachtungen in Lehrsätzen und Aufgaben bietet: so macht man nur zwei Theile, von welchen der eine die ebenen Figuren abhandelt mit Einschluß dessen, was von den geraden Linien zu bemerken ist, und deßhalb ebene Geometrie, Planimetrie heißt, der andere aber die Körper betrachtet und körperliche Geometrie, Körperlehre, Stereometrie genennt wird.

Ebene Geometrie.

§. 11. Grundsatz. Zwischen zwei Punkten gibt es nur Eine gerade Linie.

§. 12. Grundſ. Zwei gerade Linien können keine Fläche völlig einschließen.

§. 13. Die Entfernung eines Dinges von einem andern ist der kürzeste Weg von dem einen zu dem andern;

und folglich ist die Entfernung zweier Punkte von einander die gerade Linie zwischen ihnen.

§. 14. Parallellinien sind solche gerade Linien in einer Ebene, deren sämmtliche entsprechende Punkte durchaus gleiche Entfernung haben. Unter entsprechenden Punkten in zweien Linien sind aber diejenigen zu verstehen, welche von einem gewissen Anfange die gleichvielten oder gleichentfernten sind, z. B. in den beiden Linien AB und CD (1. Figur) sind die Punkte b und b entsprechende Punkte, weil sie beide von dem beliebigen Anfange a und a gleichweit entfernt sind; deßgleichen die Punkte c und c, die Punkte d und d, für welche als Anfangspunkte sowohl die Punkte a und a, als auch b und b dienen können. Wenn nun d von d, c von c, und b von b gerade soweit von einander entfernt sind, als a von a, und das Nämliche von allen entsprechenden Punkten gilt: so sind die beiden Linien AB und CD parallel oder gleichlaufend. Es versteht sich übrigens von selbst, daß die Anfänge auch von dem ersten Punkte in jeder Linie genommen werden können. Das Zeichen für parallele Linien ist ||.

§. 15. Konvergirende (zusammenlaufende) Linien sind solche gerade, welche gehörig verlängert einander schneiden; in ihrer entgegengesetzten Richtung heißen sie divergirend (auseinanderfahrend).

§. 16. Ausgedehnte Größen decken einander, wenn man sie so auf oder in einander legen kann, daß alle ihre Grenzen auf einander fallen.

§. 17. Grundſ. Ausgedehnte Größen, welche einander decken, sind in Hinsicht auf Gestalt und Größe einander gleich oder kongruent.

§. 18. Zwei gerade Linien, welche aus einem gemeinschaftlichen Punkte ausgehen, bilden an diesem Punkte, welcher der Scheitel oder die Spitze heißt, einen Win-

kel; sie selbst heißen seine Schenkel. Man bezeichnet den Winkel durch einen Buchstaben A an dem Scheitel (2. Fig.) oder durch einen kleinen inwendig eingeschriebenen Buchstaben x oder in zweideutigen Fällen durch drei Buchstaben BAC so, daß der Buchstabe am Scheitel in die Mitte zu stehen kommt.

§. 19. Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Schenkel haben und deren beide übrigen Schenkel eine einzige gerade Linie bilden, heißen Nebenwinkel. Wenn diese einander gleich sind, so heißen sie rechte Winkel, und jeder andere Winkel heißt ein schiefer, insbesondere aber ein spitzer, wenn er kleiner; ein stumpfer aber, wenn er größer als ein rechter ist.

Jede gerade Linie, welche mit einer andern einen rechten Winkel bildet, steht senkrecht oder perpendikulär auf dieser, und heißt davon auch ein Perpendikel. Bei rechten Winkeln gibt es also immer Perpendikel, und eben so auch rechte Winkel bei Perpendikeln.

§. 20. Grundsatz. Die Schenkel gleicher Winkel fallen auf einander, wenn man sie auf einander legt; und Winkel, deren Schenkel auf einander fallen, sind gleich.

§. 21. Alle bildlichen Darstellungen geometrischer Begriffe und Sätze heißen Figuren. Insbesondere nennt man eine ebene von allen Seiten begrenzte Fläche eine ebene Figur oder Ebene. Die Seitenlinien, welche sie begrenzen, heißen zusammen genommen ihr Umfang, Perimeter; die Punkte, in welchen zwei Seitenlinien zusammen stoßen, ihre Ecken; und die geraden Linien, welche von einer Ecke zur andern gezogen werden, ohne in den Umfang selbst zu fallen, Diagonalen. Die Seiten können gerade oder krumme sein oder gerade und krumme zugleich; davon nennt man die Figuren geradlinigt, krummlinigt, gemischtlinigt. Uebrigens

werden alle Figuren, von welchen in der Folge die Rede sein wird, als in Einer Ebene liegend angenommen.

§. 22. Jede von geraden Linien begrenzte Figur heißt Vieleck oder Polygon; und zwar ordentliches (reguläres), wenn alle Seiten und Winkel einander gleich sind; unordentliches (irreguläres), worin Seiten und Winkel ungleich sind. Bei einem ordentlichen Vieleck heißt der Winkel, den zwei Seiten bilden, der Polygonwinkel. Nach der Anzahl der Seiten oder Ecken erhalten die Polygone ihre Namen, z. B. Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w.

§. 23. Ein Dreieck ist eine von drei geraden Linien begrenzte Figur. Die Dreiecke sind in Bezug auf die Seiten entweder gleichseitig, oder gleichschenklig, oder ungleichseitig, je nachdem alle drei Seiten, oder nur zwei, oder keine einander gleich sind. Irgend eine Seite kann Grundlinie heißen; dann ist die Höhe diejenige senkrechte Linie, welche von der Spitze des Gegenwinkels auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung gezogen ist. In Rücksicht auf die Winkel sind die Dreiecke entweder rechtwinklig, oder spitzwinklig, oder stumpfwinklig, je nachdem sie entweder einen rechten, oder lauter spitze, oder einen stumpfen Winkel haben. In dem rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite die Hypotenuse, und die den rechten Winkel bildenden die Katheten.

§. 24. Ein Viereck ist eine von vier geraden Linien begrenzte Figur. Dasjenige, welches vier gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat, heißt Quadrat; sind zwar die Winkel rechte, aber nur die gegenüber stehenden Seiten einander gleich, so ist es ein Rechteck. In einer Raute (Rhombus) sind die Seiten gleich und die Winkel schief; in der länglichten Raute (Rhomboides) sind auch die Winkel schief, aber nur die gegenüber

stehenden Seiten gleich. Alle ungleichseitigen Vierecke nennt man Trapeze. Vierecke, in welchen die gegenüber stehenden Seiten parallel sind, heißen Parallelogramme; sind aber nur zwei Linien parallel, so sind es Paralleltrapeze.

§. 25. Die Kreisfläche oder der Kreis ist eine ebene Figur, deren Umfang (Kreislinie, Peripherie) von einem in ihr liegenden Punkte, welcher der Mittelpunkt heißt, überall gleichweit absteht. Eine Kreislinie entsteht, wenn sich eine gerade Linie um ihren einen festen Endpunkt in einer Ebene bewegt, bis sie wieder in die anfängliche Lage kommt. Die gerade Linie von dem Mittelpunkt bis zur Peripherie gezogen heißt der Halbmesser, und diejenige gerade, welche von einem Punkt der Peripherie zu einem andern durch den Mittelpunkt geht, der Durchmesser. Gerade Linien, welche von dem Umkreise begrenzt werden, ohne durch den Mittelpunkt zu gehen, nennt man Sehnen oder Chorden; jedes Stück des Umkreises einen Kreisbogen und den vierten Theil desselben einen Quadranten; ein Stück der Kreisfläche, das zwischen zweien Halbmessern und ihrem Bogen enthalten ist, einen Ausschnitt oder Sektor, und dasjenige Flächenstück, welches zwischen einer Sehne und ihrem Bogen liegt, einen Abschnitt oder ein Segment.

§. 26. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich; folglich auch alle Durchmesser.

§. 27. Kreise, welche einerlei Mittelpunkt haben, heißen koncentrisch. Und eine Figur heißt im Kreise beschrieben, wenn alle ihre Ecken in des Kreises Umfange liegen; sie ist um den Kreis beschrieben, wenn alle ihre Seiten den Umfang des Kreises berühren.

§. 28. Aus jedem Punkte läßt sich in willkührlicher Entfernung von ihm in einer Ebene eine Kreislinie verzeichnen.

§. 29. Lehrs. Kreislinien und Kreisflächen sind gleichgroß, wenn ihre Halbmesser gleich sind.

Bew. Man lege die Kreise so auf einander, daß ihre Mittelpunkte auf einander zu liegen kommen. Da nun die Halbmesser gleich sind, so müssen ihre Grenzen auf einander fallen und die Kreise einander decken d. h. sie sind gleichgroß oder kongruent.

§. 30. Zus. Bei einerlei Halbmesser sind daher auch Sehnen gleicher Bögen und Bögen gleicher Sehnen, ingleichen die Abschnitte und Ausschnitte, welche zu gleichen Sehnen oder zu gleichen Bögen gehören, gleichgroß, wenn beide Bögen kleiner oder beide größer als der Halbkreis sind.

§. 31. Zus. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei Hälften, und alle Hälften, die zu allen möglichen Durchmessern eines Kreises gehören, sind unter sich gleich.

§. 32. Zus. Daher läßt sich aus jedem Punkte einer geraden Linie ein Halbkreis über ihr ziehen.

§. 33. Lehrs. Bögen koncentrischer Kreise, welche von Halbmessern abgeschnitten sind, die unter einerlei Winkel vom Mittelpunkte aus gezogen sind, stehen mit ihren zugehörigen ganzen Peripherien in gleichem Verhältnisse.

Bew. Der äußere Kreis (Fig. 3.) sei in eine Anzahl gleicher Theile getheilt. Vom Mittelpunkte C aus seien nach zweien solchen Theilungspunkten, wie D und B, Halbmesser gezogen. Nun lasse man sich in Gedanken den Ausschnitt BCD um BC bewegen, so wird D auf A fallen; eben so den Ausschnitt ACB um AC bewegen, so wird B auf I fallen, u. s. w. bis man wieder in D anlangt. Da muß nun auch zugleich d auf a fallen und bd = ab werden; eben so b auf i fallen und ab = ai werden u. s. w. dergestalt, daß der innere Kreis in eben so viele gleiche Theile getheilt wird als der äußere getheilt ist. Der sovielte Theil daher BD von seinem ganzen

Umkreise ist, der ebensovielte muß auch bd von seinem ganzen Umkreise sein.

§. 34. Die Peripherie eines jeden Kreises theilt man gewöhnlich in 360 gleiche Theile und nennt sie Grade; jeden Grad wieder in 60 gleiche Theile, Minuten genannt; jede Minute in 60 Sekunden u. s. w. und bezeichnet die Grade durch (°), die Minuten durch (′) und die Sekunden durch (″). Ein Winkel wird nun durch die Anzahl Grade, Minuten, Sekunden gemessen, die der Bogen enthält, welchen seine beiden Schenkel von demjenigen Kreise abschneiden, der seinen Mittelpunkt in des Winkels Scheitel hat. Und man sieht nun ein, daß es gleichviel ist, mit welchem Halbmesser man diesen Kreis beschreibt. Auch erhellet, daß alle Winkel, die eine gleiche Anzahl Grade haben, gleichgroß sind, und daß gleiche Winkel eine gleiche Anzahl Grade haben.

§. 35. Zwei rechte Winkel werden durch einen Halbkreis gemessen; und auf einen jeden rechten Winkel kommt zum Maaße ein Quadrant oder 90 Grad, weßhalb wir ihn mit Q bezeichnen. Daher sind alle rechte Winkel einander gleich; und durch ein und denselben Punkt einer geraden Linie ist nur Ein Perpendikel möglich.

§. 36. Zwei Nebenwinkel werden auch durch einen Halbkreis gemessen. Demnach sind immer zwei Nebenwinkel zusammengenommen zweien rechten Winkeln oder 180° gleich. Und wenn von zweien Nebenwinkeln der eine bekannt ist, so läßt sich auch leicht der andere berechnen.

§. 37. Ferner alle Winkel, welche um einen Punkt herum so liegen, daß ihre beiden äußersten Schenkel eine gerade Linie bilden, machen zusammen zwei rechte Winkel aus.

§. 38. Alle Winkel, welche rings herum um einen Punkt liegen, werden durch den ganzen Umkreis

gemessen und betragen also 360 Grade oder sie sind $= 4$ Q.

§. 39. **Lehrs.** Wenn zwei oder mehre Winkel in einer Ebene einen gemeinschaftlichen Scheitel haben und zusammen zwei rechte Winkel ausmachen, so liegen die beiden äußersten Schenkel in einer geraden Linie.

Bew. Man nehme einmal die Gegenbehauptung an, daß nämlich (Fig. 4.) AC und EC die äußersten Schenkel seien und beide nicht in einer geraden Linie wie ACD liegen, so müßte jedoch nach der Voraussetzung $v + w = 2$ Q sein. Allein wenn AC und CD in gerader Linie liegen, so ist $v + w + x = 2$ Q. Wir erhielten daher $v + w = v + w + x$, was ein Widerspruch ist. Ein ähnlicher Widerspruch zeigt sich aber auch, wenn wir den andern äußersten Schenkel in noch anderer Richtung, etwa nach CF, setzen, und wiederum nicht nach CD. Da aber die Vernunft keinen Widerspruch verträgt, so sind wir genöthigt, die beiden äußersten Schenkel nur in einer geraden Linie liegend anzunehmen.

§. 40. Wenn zwei gerade Linien einander durchschneiden, so heißen die einander gegenüber liegenden Winkel, deren Schenkel in einerlei gerade Linien fallen, **Scheitelwinkel** oder **Vertikalwinkel.**

§. 41. **Lehrs.** Scheitelwinkel sind einander gleich. (F. 5.)

Bew. Es ist
$$\begin{array}{rcl} v + x & = & 2\,Q \\ w + x & = & 2\,Q \\ \hline v + x & = & w + x \\ -x & & -x \\ \hline v & = & w \end{array}$$

§. 42. **Messen** heißt untersuchen, wie oft eine bekannte Größe, die als Einheit des Maaßes gilt, in einer andern, welche gemessen werden soll, enthalten ist. Jede Art von Größe wird durch eine ihr gleichartige gemessen; also Linien durch Linien, Flächen durch Flächen, Körper

durch Körper. Die Einheit des Maaßes ist von willkührlicher Größe. So ist der Fuß oder Schuh in verschiedenen Ländern verschieden. Der Fuß wird in 10 oder 12 gleiche Theile getheilt, welche Zolle heißen; eben so der Zoll in Linien. Dagegen machen 10 oder 12, auch 14, 16 Fuß, in einer geraden Linie gedacht, eine Ruthe aus. Die Ruthen werden durch (°), die Fuße durch (′), die Zolle durch (″), die Linien durch (‴) bezeichnet, z. B. 23° 7′ 3″ 8‴.

§. 43. Lehrs. Wenn zwei Seiten mit ihrem Zwischenwinkel in einem Dreiecke so groß als in einem andern Dreiecke sind, so ist Alles in beiden Dreiecken gleich.

Bew. In den beiden Dreiecken ABC und DEF (Fig. 6.) sei nach der Voraussetzung AB = DE, AC = DF und W. A = W. D. Nun lege man das eine Dreieck DEF auf das andere ABC so, daß D auf A und DE auf AB falle, so fällt der Punkt E auf B; es muß aber auch DF auf AC und der Punkt F auf C fallen. Es kommt nun EF ganz auf BC zu liegen; daher decken sich die Dreiecke; folglich ist Alles in ihnen gleich.

§. 44. Lehrs. Wenn zwei Winkel mit der Zwischenseite in einem Dreiecke so groß als in einem andern sind, so ist Alles in beiden Dreiecken gleich.

Bew. In den beiden Dreiecken ABC und DEF (Fig. 6) sei nach der Voraussetzung AB = DE, W. A = W. D und W. B = W. E. Man lege nun die beiden Dreiecke so auf einander, daß DE die AB deckt, so muß DF auf AC und EF auf BC fallen. Der Punkt F, der sowohl von DF als auch von EF der Endpunkt ist, muß daher sowohl in AC als auch in BC liegen; er kann daher nur auf den gemeinschaftlichen Punkt C fallen. Die beiden Dreiecke decken also einander, und folglich ist Alles in ihnen gleich.

§. 45. Lehrs. Wenn in zweien Dreiecken alle drei Seiten einander gleich sind, so ist Alles in ihnen gleich.

Bew. In den beiden Dreiecken ABC und DEF (Fig. 7.) sei vermöge der Voraussetzung AB = DE; AC = DF und BC = EF. Nun lege man beide Dreiecke auf einander so, daß DE die AB deckt. Hierauf ziehe man aus dem Punkte A mit einem Halbmesser = AC einen Bogen mn, und eben so aus B mit einem Halbmesser = BC einen Bogen op, die sich in dem Punkte C durchschneiden. Weil aber DF = AC; so muß auch F als Endpunkt der Linie DF in einen Punkt des Bogens mn fallen; und aus gleichem Grunde der Linie EF Endpunkt F in einen Punkt des Bogens op. Dieser Punkt kann aber nur der gemeinschaftliche Punkt C sein d. h. der Punkt F fällt auf den Punkt C und beide Dreiecke decken einander vollkommen und W. A = W. D, W. B = W. E und W. C = F oder Alles ist in beiden Dreiecken gleich.

§. 46. Zus. Die eben vorgetragenen drei Lehrsätze von der Gleichheit der Dreiecke lehren, daß in zwei gleichen Dreiecken gleiche Seiten gleichen Winkeln und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber stehen.

§. 47. Zus. Auch erhellet, daß durch drei Stücke eines Dreiecks, worunter sich wenigstens eine Seite befinden muß, das Dreieck selbst bestimmt d. h. nur Ein Dreieck möglich ist. Nur der Fall ist ausgenommen, wo zwei Seiten mit einem anliegenden Winkel das Dreieck bilden sollen. Hier findet eine Unbestimmtheit Statt, wenn die Gegenseite des Winkels kleiner als die Nebenseite ist; denn da können zwei verschiedene Dreiecke aus den nämlichen Stücken gebildet werden, wie Fig. 8. ausweiset, wo die beiden Dreiecke ABC und ADC ganz verschieden sind und doch die drei Stücke AC, BC = DC, und W. A gemeinschaftlich haben.

§. 48. Lehrs. Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der dritten Linie einander gleich.

Bew. In dem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 9.) verlängere man beide gleiche Schenkel CA und CB gleichgroß z. B. bis D und E, so sind die Dreiecke CAE und CBD vollkommen gleich; also W. E = W. D und AE = BD; überdieß BE = AD; folglich Dr. ABE = Dr. ABD und W. BAE = W. ABD. Es ist aber auch W. CAE = W. CBD; demnach CAE — BAE = CBD — ABD d. i. W. v = W. w.

§. 49. Zus. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich.

§. 50. Lehrs. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Bew. Es sei nach der Voraussetzung (Fig. 10.) W. CAB = W. CBA. Nun nehme man einmal an, CA und CB seien einander nicht gleich, so müßte die eine Linie z. B. CA die größere sein. Von dieser schneide man DA = CB ab und ziehe DB. Man hätte also DA = CB; AB = AB und W. CAB = W. CBA; folglich wäre Dr. DAB = Dr. CBA, was unmöglich ist. Demnach ist die Annahme, daß CA und CB ungleich seien, falsch; und es ist CA = CB.

§. 51. Zus. Wenn alle drei Winkel in einem Dreiecke gleich sind, so ist dasselbe gleichseitig, und eine reguläre Figur.

§. 52. Aufgabe. Ein Dreieck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Dreiecke gleich oder kongruent ist.

Auflösung. Das gegebene Dreieck sei ABC (Fig. 11.). Nun mache man eine Linie DE = AB, beschreibe mit einem Halbmesser = AC aus D einen Bogen und eben so aus E mit einem Halbmesser = BC einen Bogen so, daß diese sich durchschneiden. Von dem Durchschnitte F ziehe man gerade Linien nach D und E.

§. 53. Aufg. Einen vorgegebenen Winkel zu verzeichnen.

Aufl. Der vorgegebene Winkel sei (Fig. 12.) A. Aus dessen Spitze schneide man von den beiden Schenkeln beliebige Stücke ab, die unter sich gleich oder ungleich sein können, z. B. AB und AC, und verbinde die Enden durch eine gerade Linie, wie BC, so erhält man ein Dreieck ABC, dem man ein anderes gleiches, wie DEF nachzeichnet: so ist W. D = W. A.

§. 54. Aufg. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Aufl. Vom Scheitel A aus (Fig. 13.) schneide man von den beiden Schenkeln gleiche Stücke ab, wie AB = AC; aus den Endpunkten B und C beschreibe man mit gleichen Halbmessern Bögen, die sich durchschneiden. Von dem Durchschnittspunkte D ziehe man nach der Spitze des Winkels eine gerade Linie DA. Diese halbirt den Winkel.

§. 55. Aufg. Eine gerade Linie zu halbiren.

Aufl. Aus den beiden Enden der gegebenen Linie AB (Fig. 14.) beschreibe man zu ihren beiden Seiten mit gleichen Halbmessern Bögen, die sich durchschneiden. Durch die Durchschnittspunkte D und E ziehe man eine gerade Linie. Diese theilt die gegebene in zwei gleiche Theile in F. Die sich durchschneidenden Bögen können auch auf einer Seite der zu halbirenden Linie angebracht werden.

§. 56. Aufg. Auf einer gegebenen geraden Linie durch einen in ihr gegebenen Punkt eine senkrechte Linie aufzurichten.

Aufl. Von dem gegebenen Punkte C (Fig. 15.) aus schneide man auf beiden Seiten gleiche Stücke CE = CF ab. Von deren Endpunkten E und F aus beschreibe man mit gleichen Halbmessern Bögen, die sich durchschneiden. Von dem Durchschnittspunkte D ziehe man nach dem gegebenen Punkte C eine gerade Linie DC. Diese ist das verlangte Perpendikel.

§. 57. Aufg. Aus einem gegebenen Punkte auf eine gerade Linie ein Perpendikel zu fällen.

Aufl. Man beschreibe aus dem gegebenen Punkte C (Fig. 16.) Kreisbögen mit gleichen, aber solchen Halbmessern, welche die gegebene Linie in zwei verschiedenen Punkten, wie in D und E, durchschneiden. Aus diesen Punkten beschreibe man abermals Bögen mit gleichen Halbmessern, welche einander oberhalb oder unterhalb des gegebenen Punktes C durchschneiden, wie in F. Die durch F und C nach der gegebenen Linie gezogene gerade Linie ist das verlangte Perpendikel.

§. 58. Lehrs. Wenn in einem Dreiecke irgend eine Seite verlängert wird, so ist der dadurch entstandene äußere Winkel größer als jeder der beiden innern gegenüber stehenden Winkel.

Bew. Man verlängere z. B. AB (Fig. 17.) nach D, ziehe von A durch die Mitte von CB eine gerade Linie so, daß EF = AE werde, und ziehe die Linie FB. Jetzt ist das Dr. EFB = Dr. AEC; folglich W. EBF = W. ECA. Demnach EBF + FBD > ECA d. i. W. CBD > W. BCA.

Wenn man nun auch CB verlängert, so findet man auf gleiche Weise, daß W. CAB < W. ABG < W. CBD ist.

§. 59. Lehrs. In jedem Dreiecke sind zwei Winkel zusammen genommen kleiner als zwei rechte.

Bew. Man verlängere irgend eine Seite des Dreiecks z. B. BA (Fig. 18.) nach D. Nun ist

$$x = x$$
$$v + x < x + y$$
$$v + x < 2\,Q$$

Eben dieses wird auf gleiche Weise von einem jeden Paare von Winkeln des Dreiecks bewiesen.

§. 60. Zus. Daher sind in einem Dreiecke, das

einen rechten oder stumpfen Winkel hat, die beiden andern spitz.

§. 61. Zus. Auf eine gerade Linie gibt es von einem Punkte außerhalb derselben nur eine einzige senkrechte.

§. 62. Lehrs. Eine gerade Linie, aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nach der Mitte der gegenüber stehenden Seite gezogen, theilt das Dreieck in zwei kongruente Hälften, halbirt die Winkel an der Spitze, und steht senkrecht auf der gegenüber stehenden Seite.

Bew. Es ist (Fig. 19.) AC = BC; AD = BD und CD = CD; folglich Dr. ADC = Dr. BDC und W. ACD = W. BCD. Es ist aber auch x = y = Q; folglich steht CD senkrecht auf AB.

§. 63. Lehrs. Eine gerade Linie, aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die gegenüber stehende Seite senkrecht gezogen, halbirt diese Seite, das Dreieck und den Winkel an der Spitze.

Bew. Wir gehen von der Gegenbehauptung aus, daß die senkrechte CD (Fig. 20.) es nicht sei, welche die AB halbirte, so müßte es doch eine andere sein, z. B. CG. Jetzt wäre AC = BC; AG = BG und CG = CG; folglich Dr. ACG = Dr. BCG und daher W. AGC = W. BGC = Q; folglich auch CG auf AB senkrecht, welches unmöglich ist, da schon CD senkrecht ist vermöge der Voraussetzung. Darum kann keine andere Linie als die senkrechte CD die halbirende sein. Nun muß aber auch weiter in Wahrheit Dr. ADC = Dr. BDC sein, und W. ACD = W. BCD.

§. 64. Lehrs. In jedem Dreiecke liegen den größern Seiten auch größere Winkel gegenüber.

Bew. Es sei AB > BC (Fig. 21.). Von dem gemeinschaftlichen Scheitel B der beiden verglichenen Linien aus schneide man von der größern Linie ein Stück ab so groß, als die kleinere ist; von dessen Endpunkte D ziehe

man nach der gegenüber liegenden Spitze C eine gerade Linie CD, so ist $x = y$. Aber $x > A$; folglich auch $y > A$; und um so mehr $v + y > A$ d. i. $C > A$.

§. 65. Lehrs. In jedem Dreiecke liegen den größern Winkeln auch größere Seiten gegenüber.

Bew. Es sei (Fig. 21.) W. C größer als W. A. Wäre nun $AB = CB$, so wäre W. $C =$ W. A gegen die Voraussetzung; wäre aber AB kleiner als CB, so wäre auch W. C kleiner als W. A, abermals gegen die Voraussetzung. Da also die AB der CB weder gleich noch kleiner als dieselbe ist, so muß AB größer als CB sein.

§. 66. Zus. Unter allen geraden Linien, die sich aus einem gegebenen Punkte, wie C (Fig. 19 und 20.), auf eine gerade Linie, wie AB, ziehen lassen, ist das Perpendikel CD die kürzeste.

§. 67. Lehrs. In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte.

Bew. In der 22. Figur verlängere man AC so weit, daß $CD = CB$ werde; dann ist $AD = AC + CB$. Jetzt ziehe man auch noch DB, so ist $x = y$; folglich W. $ABD > y$ und $AD > AB$ oder $AC + CB > AB$.

§. 68. Zus. Die gerade Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern.

§. 69. Lehrs. Wenn von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks nach den Endpunkten einer Seite zwei gerade Linien gezogen werden, so sind dieselben kleiner als die beiden übrigen Seiten des Dreiecks, schließen aber einen größern Winkel ein.

Bew. Der Punkt sei D (Fig. 23.). Man verlängere AD nach E, so ist $AC + CE > AE$, folglich auch $AC + CB > AE + EB$. Ferner ist $DE + EB > DB$, folglich auch $AE + EB > AD + DB$. Darum ist um so mehr $AC + CB > AD + DB$.

In Bezug auf die andere Behauptung des Satzes ist

W. ADB $>$ W. AEB und W. AEB $>$ W. ACB; folglich um so mehr W. ADB $>$ W. ACB.

§. 70. Lehrs. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks zweien Seiten eines andern gleich sind, die dritte aber in dem einen größer ist als in dem andern, so ist auch der Gegenwinkel in jenem größer als in diesem.

Bew. Es sei (Fig. 24.) AC = ac; BC = bc; aber AB $>$ ab. Nun zeichne man in ABC ein Dreieck gleich dem Dr. abc dergestalt, daß BC = bc sofort beibehalten werde. Indem man nun zur weitern Verzeichnung mit einem Halbmesser = ba einen Bogen aus B beschreibt, so muß dieser nothwendig, weil nach der Voraussetzung ba $<$ BA ist, die AB irgendwo schneiden und also zwischen A und B fallen. Darum muß auch die dritte Linie CD = cd zwischen die Schenkel CA und CB fallen d. h. der W. DCB kann nur ein Theil des W. ACB werden; demnach W. DCB $<$ W. ACB; folglich auch W. acb $<$ W. ACB.

§. 71. Aufg. Aus drei gegebenen Linien, von welchen je zwei zusammen größer sind als die dritte, ein Dreieck zu verzeichnen.

Aufl. Man nehme eine der Linien zur Grundlinie. Aus dem einen Endpunkte derselben beschreibe man mit der zweiten Linie, und aus dem andern Endpunkte mit der dritten Linie Bögen, die sich durchschneiden. Von ihrem Durchschnitte ziehe man nach jenen Endpunkten gerade Linien, so erhält man das verlangte Dreieck.

§. 72. Zus. Aus zwei gegebenen Linien erhält man ein gleichschenkliges Dreieck, indem man mit der zweiten Linie aus den Endpunkten der Grundlinie sich durchschneidende Bögen zieht. Und zu einem gleichseitigen Dreiecke braucht nur Eine Linie gegeben zu sein.

§. 73. Aufg. Aus zwei gegebenen Linien und einem

Winkel, welchen jene einschließen sollen, ein Dreieck zu verzeichnen.

Aufl. Man setze beide Linien unter dem gegebenen Winkel an einander, und ziehe durch ihre Endpunkte die dritte Seite.

§. 74. Aufg. Aus einer Linie und zweien Winkeln, welche kleiner als zwei rechte sein und an jener Linie anliegen sollen, ein Dreieck zu verzeichnen.

Aufl. Man ziehe zuerst eine Linie so groß wie die gegebene, und setze an ihren Endpunkten die beiden Winkel an. Ihre Schenkel verlängere man so weit, bis sie sich durchschneiden. Der Durchschnitt gibt die dritte Spitze, und damit bildet sich das verlangte Dreieck.

§. 75. Lehrs. Wenn zwei Parallellinien von einer geraden Linie durchschnitten werden, so sind 1) die Wechselwinkel x und y einander gleich (Fig. 25.), 2) der Außenwinkel v ist dem gleichliegenden innern y gleich (Fig. 26.), und 3) die innern Winkel w und y zusammengenommen betragen zwei Rechte.

Bew. 1) Von dem Durchschnittspunkte G aus schneide man ein beliebiges Stück GH in der einen Parallellinie CD ab (Fig. 25.); in der andern AB schneide man gleichfalls von dem Durchschnittspunkte I aus ein gleichgroßes Stück IK in der entgegengesetzten Richtung ab: so sind die Punkte H und G in der Linie CD entsprechend den Punkten I und K in der Linie AB. Da aber nach der Voraussetzung beide Linien parallel sind, so sind die Entfernungen zwischen H und I und zwischen G und K gleichgroß. Verbindet man nun gedachte Punkte durch gerade Linien HI und GK, so sind diese einander gleich, und man hat HI = GK; HG = IK und GI = GI; folglich x = y.

2) In der 26. Fig. ist x = v und x = y; folglich v = y.

3) Die Winkel $v + w = 2Q$; aber $v = y$; folglich auch $y + w = 2Q$.

§. 76. Lehrs. Wenn bei zwei geraden Linien, die von einer dritten durchschnitten werden, 1) der äußere Winkel dem innern gleichliegenden gleich ist, oder 2) die innern Winkel zusammen zwei rechte betragen, oder 3) die Wechselswinkel gleich sind: so sind jene zwei Linien parallel.

Bew. 1) Sollten sie irgendwo, z. B. nach M hin (Fig. 26.), zusammen stoßen, so würde ein Dreieck entstehen, wo v größer als y wäre, gegen die Voraussetzung.

2) In dem entstehenden Dreiecke würden schon zwei Winkel allein, nämlich hier w und y, zwei rechte Winkel ausmachen, was gegen eine frühere Wahrheit ist.

3) Weil $x = y$ und $x = v$; so ist auch $y = v$; folglich sind nach Nr. 1) die Linien AB und CD parallel.

§. 77. Zus. Wenn keine dieser Bedingungen eintritt, so sind auch die durchschnittenen Linien nicht parallel.

§. 78. Lehrs. Zwei gerade Linien, die mit einer dritten parallel laufen, sind selbst unter sich parallel.

Bew. Es seien (Fig. 27.) sowohl AB als auch CD mit EF parallel, und man ziehe GH, so ist $x = y$ und $z = y$; daher auch $x = z$; folglich $AB \parallel CD$.

§. 79. Lehrs. Parallellinien zwischen Parallellinien sind gleichgroß.

Bew. Man ziehe (Fig. 28.) eine Linie, wie AD, so ist $x = v$, $w = y$ und $AD = AD$; folglich $AB = CD$ und $BD = AC$.

§. 80. Lehrs. Perpendikel zwischen Parallellinien sind gleichgroß.

Bew. Die Perpendikel zwischen den Parallellinien AB und CD (Fig. 29.) seien EF und GH, so ist $x = y$; daher $EF \parallel GH$; folglich $EF = GH$.

§. 81. Lehrs. Wenn zwischen Parallellinien eine

gerade Linie auf der einen von ihnen senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Bew. Die Linie EF sei senkrecht auf CD (Fig. 29.), so ist $x = w$; aber $x = Q$; daher auch $w = Q$; folglich FE auch senkrecht auf AB.

§. 82. Lehrs. Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei gleiche Dreiecke getheilt. Auch sind in ihm die gegenüber liegenden Winkel einander gleich.

Bew. Es ist (Fig. 28.) $x = v$; $w = y$ und AD = AD; folglich Dr. ADB = Dr. CDA; AB = CD; BD = AC und W. B = W. C; endlich $x + y = v + w$ d. i. W. A = W. D.

§. 83. Zus. In jedem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Seiten gleichgroß; und die an einer Seite liegenden Winkel machen zusammen zwei rechte aus.

§. 84. Zus. Ein Parallelogramm, worin ein rechter Winkel ist, hat lauter rechte Winkel.

§. 85. Aufg. Durch einen Punkt eine Linie zu ziehen, welche mit einer andern parallel ist.

Aufl. Von dem gegebenen Punkte A (Fig. 30.) ziehe man nach einem beliebigen Punkte der gegebenen Linie BC eine gerade Linie, wie AF, mache den Winkel $y =$ W. x und verlängere den Schenkel AD nach der entgegengesetzten Richtung, wie nach E.

§. 86. Lehrs. Die drei Winkel eines Dreiecks machen zusammen zwei rechte Winkel aus.

Bew. Man verlängere irgend eine Seite, z. B. AB nach D (Fig. 31.), und ziehe BE parallel mit AC, so ist $x = w$, $y = v$ und $z = z$; demnach

$$x + y + z = w + v + z$$
$$2\,Q = w + v + z$$
$$\overline{}$$
$$x + y + z = 2\,Q$$

§. 87. Zus. Aus zwei Winkeln eines Dreiecks ergibt sich also allemal der dritte. Auch ist jeder äußere Winkel

den beiden innern ihm gegenüber liegenden gleich, wie CBD $=x+y$.

§. 88. Zus. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks gleich sind zweien Winkeln eines andern, so ist auch der dritte Winkel im ersten Dreiecke gleich dem dritten Winkel im andern Dreiecke.

§. 89. Zus. Im rechtwinkligen Dreiecke machen die beiden schiefen Winkel zusammen einen rechten Winkel aus.

§. 90. Zus. Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel $= \frac{2}{3}$ Q $= 60°$.

§. 91. Zus. Im gleichschenkligen Dreiecke sind alle Winkel gegeben, sobald einer gegeben ist.

§. 92. Zus. Wenn Dreiecke eine gleiche Seite und zwei gleiche Winkel haben, so ist Alles in diesen Dreiecken gleich.

§. 93. Zus. Weil jedes Viereck (Fig. 32.) durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zertheilt wird, so betragen die vier Winkel eines Vierecks zusammen 4 Q oder 4 rechte Winkel.

§. 94. Zus. Wenn also drei Winkel eines Vierecks gegeben sind, so ist eben dadurch auch der vierte gegeben. Und wenn in Vierecken drei Winkel in dem einen so groß sind als in dem andern, so ist auch der vierte Winkel des einen Vierecks gleich dem vierten Winkel des andern.

§. 95. Lehrs. Die Summe aller n Winkel in einer nseitigen Figur ist $=(n-2) \cdot 2$ Q.

Bew. Hier ist immer die Rede von Figuren mit auswärtsgehenden Winkeln d. h. solchen, von denen jeder kleiner als 2 Q ist. In jeder Figur dieser Art kann man von einem Ecke nach allen Ecken Diagonalen ziehen, ausgenommen nach den zwei Ecken, die jenem Ecke rechts und links zunächst liegen. Dieß giebt so viele Dreiecke als Ecken oder Seiten vorhanden sind, weniger zwei, d. h. $n-2$ Dreiecke, wenn die Figur n Seiten hat. Folglich ist die Summe aller n Winkel $=(n-2) \cdot 2$ Q.

§. 96. Zus. In einem ordentlichen Vielecke ist jeder Vieleckswinkel $= \frac{n-2}{n} \cdot 2Q$.

§. 97. Aufg. Aus zwei Seiten und einem Winkel, welchen sie einschließen sollen, ein Parallelogramm zu verzeichnen.

Aufl. Die beiden Seiten setze man unter dem gegebenen Winkel zusammen; aus dem Endpunkte B (Fig. 33) der einen Seite beschreibe man mit einem Halbmesser = AD der andern Seite einen Bogen, und eben so aus dem Endpunkte D der andern Seite mit einem Halbmesser = AB einen Bogen. Von den gedachten Endpunkten ziehe man nun nach dem Durchschnittspunkte jener Bogen gerade Linien: so entsteht das verlangte Parallelogramm.

§. 98. Aufg. Eine Figur zu verzeichnen, welche einer andern gegebenen gleich ist.

Aufl. Man zerfälle die gegebene Figur durch Diagonalen in lauter Dreiecke, und verzeichne nun nach der Reihe und in gleicher Ordnung Dreiecke, welche jenen Dreiecken gleich sind: so erhält man die gleiche Figur.

§. 99. Jede gerade Linie, über welche eine Figur als errichtet gedacht wird, heißt die Grundlinie, welche aber willkührlich angenommen werden kann. Ein Perpendikel, welches von der entferntesten Spitze auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung gezogen wird, ist die Höhe der Figur. Beim Parallelogramm ist die Höhe jedes Perpendikel von einer Seite auf ihre Gegenseite.

§. 100. Der Inhalt einer Fläche oder Figur ist die Verhältnißzahl, welche ihre Größe in Vergleichung mit einer andern als bekannt angenommenen Fläche ausdrückt. Diese letztere Fläche ist die Einheit, wozu man gewöhnlich das Quadrat von einer aus unmittelbarer Anschauung bekannten Länge nimmt. Ist die Länge dieses Quadratmaaßes eine Linie, ein Zoll, Fuß, Ruthe u. s. w., so

nennt man es Quadratlinie, Quadratzoll, Quadratfuß, Quadratruthe u. s. w.

§. 101. Lehrs. Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien sind gleichgroß.

Bew. In Fig. 34. seien ABCD und ABEF die besprochenen Parallelogramme. Da ist AD = BC, W. ADF = W. BCE und W. DFA = W. CEB; also Dr. ADF = Dr. BCE; demnach auch ABED — ADF = ABED — BCE d. h. ABEF = ABCD.

§. 102. Zus. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen haben gleichen Inhalt. Denn da die Perpendikel, als Höhen der Parallelogramme, zwischen Parallellinien gleichgroß sind: so kann man solche Parallelogramme immer so verzeichnet denken, daß sie auf einerlei Grundlinien und zwischen einerlei Parallelen sind.

§. 103. Zus. Jedes Dreieck ist halb so groß als ein Parallelogramm von derselben Grundlinie und Höhe, oder wenn bei derselben Grundlinie die Spitze des Dreiecks in die gegenüber liegende Seite des Parallelogramms fällt.

§. 104. Zus. Alle Dreiecke sind gleichgroß, wenn sie einerlei oder gleiche Grundlinie und Höhe haben, oder wenn sie bei derselben Grundlinie ihre Spitzen in einer mit der Grundlinie parallelen Linie haben.

§. 105. Aufg. Ein jedes Vieleck in ein Dreieck von gleichem Inhalte zu verwandeln. (Fig. 15. Tab. VI.)

Aufl. Durch die beiden Winkel B und D, welche dem wegzuschaffenden C zunächst anliegen, ziehe man eine gerade Linie BD und mit ihr eine Parallele CF durch den wegzuschaffenden Punkt. Hierauf verlängere man die Linie AB bis zu jener Parallele und ziehe DF; so ist das Viereck AFDEA = dem Fünfeck ABCDEF. Eben so wird jedes andere Eck weggeschafft.

§. 106. Aufg. Den Inhalt eines Rechtecks zu bestimmen.

Aufl. Es ist auszumitteln, wie oft ein Quadrat von

bekannter Länge in dem Rechtecke enthalten ist. Es leuchtet aber ein, daß, wenn das Quadrat Amno (Fig. 35.) als Einheitsmaaß gewählt wird, dasselbe so vielmal neben einander auf AB gesetzt werden kann, als Am in AB enthalten ist. Diese Reihe von Quadraten hat aber so vielmal Raum, als Ao in AD enthalten ist. Um also die Anzahl der Quadrate zu finden, die im Rechtecke Raum haben, multiplicirt man die Grundlinie AB, gemessen durch die Länge des als Einheit gebrauchten Quadrates, mit der Höhe AD, gleichfalls durch die nämliche Länge gemessen. Drücken wir des Rechtecks Grundlinie AB durch g, und seine Höhe AD durch h aus, so ist des Rechtecks ABCD Flächeninhalt $F = g \cdot h$.

§. 107. Zus. Der Inhalt eines jeden Parallelogramms ergibt sich also gleichfalls durch das Produkt aus seiner Höhe in die Grundlinie oder $F = g \cdot h$.

§. 108. Zus. Wenn jede Seite eines Quadrates durch a ausgedrückt wird, so ist sein Flächeninhalt $F = a^2$.

§. 109. Zus. Aus dem Inhalte eines Quadrates findet man dessen Seite $a = \sqrt{F}$ und den Umfang $= 4 \cdot \sqrt{F}$.

§. 110. Zus. Hiernach ist bei dem 10theiligen Längenmaaße 1 Quadratfuß = 10 . 10 = 100 Q. Zolle; 1 Q. Ruhe = 10 . 10 = 100 Q. Fuße = 100 . 100 = 10000 Q. Zolle, u. s. w.

Dagegen ist bei dem 12theiligen Längenmaaße 1 Q. Fuß = 12 . 12 = 144 Q. Zoll; 1 Q. Ruthe = 144 Q. Fuß = 20736 Q. Zoll u. s. w.

Die Quadratfuße verschiedener Städte und Länder verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Längenfuße. Z. B. der pariser Quadratfuß zum bairischen $= 144^2 : 129{,}38^2$.

§. 111. Aufg. Den Inhalt eines Dreiecks zu finden.

Aufl. Da jedes Dreieck halb so groß als ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe ist, so ist,

wenn die Grundlinie g und die Höhe h heißt, sein Flächeninhalt oder $F = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{1}{2} g \cdot h$.

§. 112. Zus. Daraus ist $g = \frac{2F}{h}$ und $h = \frac{2F}{g}$.

§. 113. Zus. Der Inhalt eines jeden Vielecks ergibt sich durch Berechnung des Inhalts der einzelnen Dreiecke, in die sich das Vieleck durch Diagonalen zerlegen läßt.

§. 114. Aufg. Den Inhalt eines Paralleltrapezes zu finden.

Aufl. Man theile ein solches Trapez (Fig. 36.) durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke, von welchen jedes die nämliche Höhe h hat. Des Dreiecks ABC Inhalt ist $= \frac{1}{2} h \cdot AB$; des Dreiecks ACD Inhalt $= \frac{1}{2} h \cdot DC$. Demnach ist dieses Trapezes Inhalt $= \frac{1}{2} h \cdot (AB + DC)$.

§. 115. Aufg. Aus dem Inhalte eines Dreiecks und zweien Seiten das Dreieck zu verzeichnen.

Aufl. Die eine der Seiten nehme man zur Grundlinie; suche dazu die Höhe (§. 112.), und ziehe in dieser Höhe eine der Grundlinie parallele Linie. Mit einem Halbmesser, gleich der andern Linie, ziehe man aus einem Endpunkte der Grundlinie einen Bogen, der die Parallele durchschneidet. Nach diesem Durchschnittspunkte ziehe man von den beiden Endpunkten der Grundlinie gerade Linien, so erhält man das verlangte Dreieck.

§. 116. Aufg. Aus dem Inhalte eines Dreiecks, einer Seite und dem anliegenden Winkel das Dreieck zu verzeichnen.

Aufl. An das eine Ende der Seite setze man den gegebenen Winkel; suche zur Seite, als Grundlinie, die Höhe, ziehe in dieser Höhe eine mit der Grundlinie Parallele, und verlängere den noch unbestimmten Schenkel

des Winkels bis zu dieser Parallele. Von dem Durchschnittspunkte ziehe man nach dem andern Ende der Grundlinie eine gerade Linie, so hat man das verlangte Dreieck.

§. 117. Durch Hilfe der zwei vorhergehenden Aufgaben kann man von jeder geradlinigten Figur ein verlangtes Stück von gewissem Inhalte abschneiden, und dieselbe in so viele, gleiche oder ungleiche, Theile theilen, als man verlangt.

§. 118. Lehrs. Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse so groß, als die Quadrate der beiden Katheten zusammen genommen.

Bew. Aus der Spitze des rechten Winkels B (Fig. 37.) ziehe man die gerade BK parallel mit CH oder AI, so wird das Quadrat der Hypotenuse in zwei Rechtecke LAIK und LCHK zertheilt. Nun ziehe man IB und FC, so ist Dr. IAB $= \frac{1}{2}$ IALK und Dr. FAC $= \frac{1}{2}$ FABG. Aber Dr. IAB = Dr. FAC; folglich auch $\frac{1}{2}$ IALK $= \frac{1}{2}$ FABG und IALK = FABG.

Zieht man weiter HB und DA, so ist Dr. HCB $= \frac{1}{2}$ HCLK und Dr. DCA $= \frac{1}{2}$ DCBE. Aber Dr. HCB = Dr. DCA; folglich $\frac{1}{2}$ HCLK $= \frac{1}{2}$ DCBE und HCLK = DCBE.

Es ist demnach IALK + HCLK = FABG + DCBE d. h. IACH = FABG + DCBE oder $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

§. 119. Zus. Aus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ folgt auch $AB^2 = AC^2 - BC^2$ und $BC^2 = AC^2 - AB^2$. Darum ist ferner $AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)}$ und $AB = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$ endlich $BC = \sqrt{(AC^2 - AB^2)}$.

§. 120. Aufg. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichgroßes Rechteck zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Dreieck sei ABC (Fig. 38.). Von diesem nehme man nach Belieben eine Seite, wie AB, zur Grundlinie an und halbire dieselbe in D. Durch

des Dreiecks Spitze C ziehe man eine Linie EF || AB, und errichte in der Grundlinie Punkten A und D Perpendikel AG und DH, welche bis an die Parallele EF reichen: so ist ADHG das verlangte Dreieck.

§. 121. Aufg. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat von gleichem Inhalte zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Rechteck sei ABCD (Fig. 39.). Man verlängere dessen kleinere Seite AB so weit, daß sie der größern gleich werde, also AE = AD, halbire diese verlängerte AE in F, und beschreibe aus F über AE einen Bogen mit einem Halbmesser = FE. Nun verlängere man CB bis zu diesem Bogen in H und ziehe auch FH und AH. Ueber diese AH beschreibe man ein Quadrat AHIK, so ist dieses dem gegebenen Rechtecke gleich.

§. 122. Figuren, in welchen alle nach einander folgende Seiten einerlei Verhältniß gegen einander haben, und bei welchen die in einerlei Verhältnisse nach einander folgenden Seiten auch unter gleichen Winkeln zusammengesetzt sind, heißen ähnlich.

§. 123. Lehrs. Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich ihrem Inhalte nach wie ihre Grundlinien, und bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen.

Bew. 1) Des einen Dreiecks A Grundlinie sei G, und des andern Dreiecks B Grundlinie g; beider Dreiecke gleiche Höhe aber h, so ist

$$A : B = \tfrac{1}{2} h . G : \tfrac{1}{2} h . g = G : g$$

2) Des Dr. A Höhe sei H; des Dr. B Höhe h; die gleichen Grundlinien drücke g aus, so ist

$$A : B = \tfrac{1}{2} g . H : \tfrac{1}{2} g . h = H : h$$

§. 124. Zus. Die nämliche Wahrheit wird auch für Parallelogramme auf gleiche Art bewiesen.

§. 124. Lehrs. Wenn in einem Dreiecke mit irgend einer Seite eine Parallele gezogen ist, so werden durch diese die beiden andern Seiten proportionirt geschnitten.

Bew. In dem Dreieck ABC (Fig. 40.) sei DE mit AB parallel. Man ziehe AE und DB, so ist Dr. DEA = Dr. EDB und es ist

Dr. CDE : Dr. DEA = Dr. CDE : Dr. EDB

Denkt man sich nun von E ein Perpendikel auf CE und von D auf CB, so ist

Dr. CDE : Dr. DEA = CD : DA

Dr. CDE : Dr. EDB = CE : EB

Demnach auch CD : DA = CE : EB.

§. 126. Zus. Daraus folgt nun weiter

1) CD : CE = DA : EB

2) CA : DA = CB : EB

3) CA : CB = DA : EB

4) CA : CB = CD : CE

5) CA : CD = CB : CE

§. 127. Zus. Man ziehe (Fig. 41.) DF || EB, so wird DE = FB, und es ist

CD : CA = BF : BA

oder CD : CA = DE : AB

und CD : DE = CA : AB

§. 128. Zus. Wenn eine der vorigen Proportionen (§. 125—127.) Statt findet, so ist DE || AB.

§. 129. Lehrs. Wenn die drei Winkel eines Dreiecks gleich sind den drei Winkeln eines andern, so haben die Gegenseiten der gleichen Winkel in beiden Dreiecken einerlei Verhältniß gegen einander.

Bew. Von CA (Fig. 42.) schneide man Cm = ca ab, von CB aber Cn = cb und ziehe mn, so ist mn = ab und W. Cmn = W. a = A und daher mn || AB. Folglich

CA : Cm = CB : Cn = AB : mn

oder CA : ca = CB : cb = AB : ab

§. 130. Zus. Diese Wahrheit gilt auch, wenn auch nur zwei Winkel in beiden Dreiecken als gleichgroß bekannt sind.

§. 131. Lehrs. Wenn die Seiten eines Dreiecks den Seiten eines andern in gleicher Ordnung proportional sind, so sind die Winkel zwischen den proportionalen Seiten in beiden Dreiecken einander gleich.

Bew. Man mache (Fig. 42.) Cm = ca und ziehe mn || AB, so ist

CA : Cm = CB : Cn
oder CA : ca = CB : Cn
aber CA : ca = CB : cb nach der Voraussetzung
Cn = cb

Eben so ist CA : Cm = AB : mn
oder CA : ca = AB : mn
aber CA : ca = AB : ab nach der Voraussetzung
mn = ab

Demnach Dr. Cmn = Dr. cab und W. Cmn = W. a; W. Cnm = W. b und W. C = W. c. Es ist aber auch W. Cmn = W. A und W. Cnm = W. B; folglich a = A und b = B.

§. 132. Zus. Dreiecke, welche gleiche Winkel haben, sind ähnlich; ebenso sind es diejenigen, welche proportionale Seiten haben.

§. 133. Lehrs. Wenn zwei Dreiecke einen gleichen Winkel haben, und die Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen, proportional sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Bew. Die gleichen Winkel seien c und C (Fig. 42.). Nun lege man c auf C so, daß ca auf CA falle, so wird cb auf CB fallen. Die Punkte a und b werden auf Punkte m und n in CA und CB fallen, so daß Cm = ca und Cn = cb wird. Zieht man nun mn, so ist Dr. Cmn = Dr. cab. Nach der Voraussetzung ist aber CA : ca = CB : cb; demnach auch CA : Cm = CB : Cn; also ist mn || AB. Daher W. A = W. m = W. a und

W. B = W. n = W. b; folglich sind die beiden Dreiecke ähnlich.

§. 134. Lehrs. Aehnliche vielseitige Figuren werden durch gleichliegende Diagonalen in eine gleiche Anzahl ähnlicher Dreiecke getheilt.

Bew. Vermöge der Aehnlichkeit der Figuren (Fig. 43.) ist W. B = W. b und AB : ab = BC : bc; demnach ist das Dr. ABC ähnlich dem Dr. abc; W. w = W. v und AC : ac = BC : bc. Ferner W. C = W. c; daher auch W. y = W. x. Da aber CD : cd = BC : bc und auch AC : ac = BC : bc, so ist auch CD : cd = AC : ac; folglich sind auch die Dreiecke ACD und acd ähnlich. Das Nämliche läßt sich auch von den übrigen Dreiecken auf gleiche Weise darthun.

§. 135. Zus. In ähnlichen Figuren verhält sich jedes Paar gleichliegender Diagonalen, wie zwei gleichliegende Seiten.

§. 136. Zus. Die ganzen Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie jedes Paar gleichliegender Seiten.

§. 137. Zus. Wenn man eine Figur so auf die ihr ähnliche legt, daß b auf B, ba auf BA und bc auf BC fällt, so sind alle Seiten der einen Figur den Seiten der andern parallel; und wenn bei einer solchen Lage die Seiten parallel liegen, so sind die Figuren ähnlich.

§. 138. Aufg. Eine Figur zu machen, welche einer gegebenen ähnlich ist.

Aufl. Man mache die Winkel den Winkeln der gegebenen Figur gleich und die Seiten proportional.

§. 139. Lehrs. Aehnliche Dreiecke verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten.

Bew. Aus gleichen Winkeln, wie C und c (Fig. 44.), lasse man Perpendikel auf die Gegenseiten, so ist

W. CDA = W. cda; überdieß W. A = W. a; folglich sind die Dreiecke ACD und acd ähnlich. Es ist also

$$AB : ab = AC : ac$$
$$CD : cd = AC : ac$$

$$AB . CD : ab . cd = AC^2 : ac^2$$

$$\tfrac{1}{2} AB . CD : \tfrac{1}{2} ab . cd = AC^2 : ac^2$$

oder Dr. ABC : Dr. abc $= AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ u. s. w.

§. 140. Lehrs. Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

Bew. Man zerlege durch gleichliegende Diagonalen die Figuren (Fig. 43.) in Dreiecke, so verhält sich Dr. ABC : Dr. abc $= AB^2 : ab^2$; Dr. ACD : Dr. acd $= CD^2 : cd^2 = AB^2 : ab^2$; Dr. ADE : Dr. ade $= AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2$. Demnach ABC : abc = ACD : acd = ADE : ade; folglich auch ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade $= AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ u. s. w.

§. 141. Aufg. Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Aufl. Die gegebenen Linien seien AB, AC und AD (Fig. 45.). Nun verzeichne man nach Willkühr einen Winkel EAD und trage auf dessen einen Schenkel zwei der gegebenen Linien, wie AB und AD, und auf den andern die dritte AC. Durch die Punkte B und C ziehe man die gerade BC und mit ihr parallel durch den Punkt D die Linie DE, so ist AE die gesuchte Proportionallinie.

§. 142. Aufg. Eine gerade Linie so zu theilen, daß die Theile eben die Verhältnisse unter einander haben, wie die Theile einer andern Linie.

Aufl. Ueber der schon getheilten CD (Fig. 46.) errichte man ein gleichseitiges Dreieck CDE; aus E schneide man auf EC und ED Stücke ab so groß als die zu thei-

lende Linie AB und verbinde die Enden durch eine gerade Linie, so wird diese der AB gleich sein. Nun ziehe man aus E nach den Theilungspunkten G und F gerade Linien, so wird durch diese die gegebene AB in den Punkten H und L nach den verlangten Verhältnissen geschnitten.

§. 143. Zus. Wenn eine gerade Linie in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile soll getheilt werden, so darf man nur eine andere gerade Linie in so viel gleiche Theile von beliebiger Größe theilen, als verlangt werden, und dann wie vorhin verfahren.

§. 144. Zus. Auch beruht auf den vorhergehenden Sätzen das Verfahren, die Figuren zu verjüngen oder sie nach einem verlangten kleinern Maaßstabe darzustellen, wozu der verjüngte Maaßstab dienet, dessen Verzeichnung ebenfalls auf den bisherigen Sätzen gegründet ist.

§. 145. Lehrs. Der Winkel am Mittelpunkte eines Kreises ist doppelt so groß als der Winkel an der Peripherie, welcher mit jenem auf einerlei Bogen steht.

Bew. Es sind drei Lagen möglich. Denn der Mittelpunkt liegt entweder in dem einen Schenkel des Peripheriewinkels oder zwischen beiden Schenkeln oder außerhalb derselben.

I) Es ist (Fig. 47.) $x = y + v = 2y$.

II) Es ist (Fig. 48.) $x = 2y$ und $w = 2z$; also $x + w = 2(y + z)$ d. i. $ACB = 2 . ADB$.

III) Es ist (Fig. 49.) $ECB = 2 . EDB$ und $w = 2z$; demnach $ECB - w = 2(EDB - z)$ d. i. $x = 2y$.

§. 146. Zus. Ein Peripheriewinkel hat die Hälfte des Bogens, worauf er steht, zu seinem Maaße. Und jeder ist so groß als ein Winkel am Mittelpunkte, welcher auf der Hälfte des Bogens steht, worauf jener ruht.

§. 147. Zus. Ein Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreise oder Durchmesser steht, ist ein rechter Winkel. Wenn er hingegen auf einem Bogen steht, welcher größer

als der Halbkreis ist, so ist er sein stumpfer; und wenn er auf einem kleinern Bogen steht, so ist er ein spitzer Winkel.

§. 148. Zus. Alle Peripheriewinkel, welche auf gleichgroßen Bögen gleicher Kreise stehen, sind einander gleich.

§. 149. Zus. In jedem Viereck, welches in einem Kreise beschrieben ist, machen zwei Gegenwinkel zusammen zwei rechte Winkel aus.

§. 150. Lehrs. Jedes rechtwinklige Dreieck wird durch eine aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse senkrecht gezogene Linie in zwei Dreiecke getheilt, welche sowohl unter einander als auch dem ganzen Dreiecke ähnlich sind.

Bew. In Fig. 50. ist $x + v = y + v$; also $x = y$; überdieß $m = n$ und daher auch $v = w$; folglich Dr. ADC ähnlich dem Dr. BDC. Eben so ist W. $m =$ W. ACB und $x = x$; demnach Dr. ADC ähnlich dem Dr. ABC. Auf gleiche Weise ergibt sich, daß auch Dr. BDC ähnlich dem Dr. ABC ist.

§. 151. Zus. Es ist $AD : DC = DC : DB$ und daher CD die mittlere Proportionallinie zwischen AD und DB.

§. 152. Zus. Ein Perpendikel CD (Fig. 51.), von dem Durchmesser bis zur Peripherie des Kreises gezogen, ist die mittlere Proportionallinie zwischen des Durchmessers beiden Theilen AD und DB. Setzt man $AD = x$, $CD = y$, $AB = a$, folglich $DB = a - x$, so ist $y^2 = ax - x^2$ und $y = \sqrt{(ax - x^2)}$.

§. 153. Aufg. Zwischen zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Aufl. Man verbinde die beiden Linien AD und DB (Fig. 51.) zu Einer geraden AB und beschreibe aus ihrer Mitte F einen Kreis. Aus ihrem Vereinigungspunkte D

errichte man ein Perpendikel DC bis an die Kreislinie, so ist dasselbe die gesuchte mittlere Proportionallinie.

§. 154. Aufg. Auf das Ende einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten.

Aufl. Man nehme über der gegebenen Linie AB (Fig. 52.) einen beliebigen Punkt C, beschreibe aus demselben mit dem Halbmesser CA einen Kreis, der die Linie in dem besprochenen Ende A schneidet, ziehe den Durchmesser DE und von dem Ende A nach E eine gerade Linie, so ist diese das verlangte Perpendikel.

§. 155. Lehrs. 1) Ein Perpendikel aus eines Kreises Mittelpunkt auf die Sehne halbirt diese und ihren Bogen. 2) Eine Linie, vom Mittelpunkte durch die Mitte der Sehne gezogen, steht auf dieser senkrecht. 3) Eine Linie, durch die Mitte der Sehne senkrecht gezogen, geht durch den Mittelpunkt.

Bew. 1) In Fig. 53. ist AC = BC, W. A = W. B und W. x = W. y; folglich AF = BF und W. ACF = W. BCF; demnach auch Bogen AD = Bog. BD.

2) Es ist CF = CF, AC = BC und AF = BF; folglich x = y und daher CF senkrecht.

3) Würde der Mittelpunkt nicht in der senkrechten F (Fig. 54.) liegen, so müßte er außerhalb derselben, etwa im Punkte G, liegen; dann würde aber außer der senkrechten FE auch die Linie FG nach Nr. 1) auf AB in dem nämlichen Punkte F senkrecht stehen, was unmöglich ist.

§. 156. Lehrs. Wenn zwei Sehnen durch senkrechte Linien halbirt sind, so schneiden sich diese im Mittelpunkte.

Bew. Weil die Linie DE (Fig. 55.) senkrecht durch die Mitte der Sehne AB gezogen ist, so geht sie durch den Mittelpunkt. Aus gleichem Grunde geht auch FG durch den Mittelpunkt. Der Mittelpunkt liegt also in bei-

den Linien zugleich; folglich kann es kein anderer sein, als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt K.

§. 157. Aufg. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden.

Aufl. Man ziehe nach Belieben eine Sehne und durch ihre Mitte eine senkrechte Linie durch den ganzen Kreis. Dieser Linie Mitte ist des Kreises Mittelpunkt.

§. 158. Aufg. Zu einem gegebenen Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden.

Aufl. Man nehme in demselben nach Belieben drei Punkte, verbinde sie durch zwei gerade Linien und ziehe durch deren Mitte senkrechte Linien. Dieser Perpendikel Durchschnitt ist der Mittelpunkt des Kreises, zu welchem der Bogen gehört.

§. 159. Aufg. Durch drei gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, eine Kreislinie zu ziehen.

Aufl. Man verbinde die drei Punkte durch gerade Linien, halbire sie und ziehe durch ihre Mitte senkrechte Linien. Ihr Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt der verlangten Kreislinie.

§. 160. Zus. Es geht hervor, daß drei Punkte einen einzigen Kreis bestimmen, und zugleich den Mittelpunkt und den Halbmesser geben.

§. 161. Lehrs. Die Ecken eines ordentlichen Vielecks liegen im Umfange eines einzigen Kreises.

Bew. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 56.) läßt sich ein Kreis beschreiben. Sein Mittelpunkt sei G, so ist GA = GB = GC und Dr. AGB = Dr. BGC; daher auch v = w = ½ B. Weil aber auch w = x ist, so ist auch x = ½ B = ½ C und x = y. Nun ziehe man die gerade GD, so entstehen zwei gleiche Dreiecke GCB und GCD, wo also GD = GB = GA = GC ist. Der durch A, B, C gehende Kreis muß daher auch durch die Ecke D gehen. Ganz auf die nämliche Art wird bewiesen, daß

derselbe auch durch die übrigen Ecken gehen muß, welche daher insgesammt in dem Umfange des nämlichen Kreises liegen.

§. 162. Zus. Die Polygonwinkel werden durch die geraden Linien, welche durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises gezogen werden, halbirt; und das ganze Vieleck ist dadurch in so viele gleiche und gleichschenklige Dreiecke getheilt, als es Seiten hat.

§. 163. Zus. Es ist der Winkel am Mittelpunkte oder der Centriwinkel wie $AGB = \frac{4\,Q}{n}$ und jeder Polygonwinkel wie $A = 2\,Q - \frac{4\,Q}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 2\,Q$.

§. 164. Aufg. Ordentliche Vielecke von gegebener Anzahl Seiten auf eine gegebene Linie zu beschreiben.

Aufl. Man setze an beide Enden der gegebenen Linie den halben Polygonwinkel an, so gibt der Durchschnitt der Schenkel dieser Winkel den Mittelpunkt des Kreises, in welchem das Polygon gezeichnet werden kann. Man hat daher nur noch die gegebene Seite in dem Umfange herum zu tragen. Oder man setze an die gegebene Seite eine andere gleichgroße unter dem zugehörigen Polygonwinkel an und beschreibe durch die sich ergebenden drei Endpunkte oder Ecken einen Kreis, in dessen Umfang die gegebene Seite herumgetragen wird.

§. 165. Aufg. Ordentliche Vielecke von gegebener Anzahl Seiten in einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Man ziehe aus seinem Mittelpunkte zwei Halbmesser unter dem zugehörigen Centriwinkel. Der Bogen dieses Winkels hat zur Sehne die Seite des verlangten Vielecks, welche man nur in dem Kreise herumtragen darf.

§. 166. Zus. Ein ordentliches Viereck in einem Kreise zu verzeichnen, darf man nur zwei Durchmesser einander

senkrecht durchschneiden lassen, und ihre Endpunkte durch gerade Linien verbinden.

§. 167. Lehrs. Die Seite des ordentlichen Sechsecks ist dem Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises gleich.

Bew. Des Sechsecks Polygonwinkel hält 120°; demnach w = x = 60° (Fig. 56.). Es ist aber auch der Centriwinkel BGC = 60°. Folglich ist das Dreieck BGC gleichseitig und BC = BG.

§. 168. Zus. Um also ein ordentliches Sechseck in einem Kreise zu beschreiben, darf man nur den Halbmesser sechsmal in demselben herumtragen.

§. 169. Zus. Auf eine gegebene Linie ein Sechseck zu verzeichnen, beschreibe man über derselben ein gleichseitiges Dreieck. Aus seiner Spitze zeichne man einen Kreis, dessen Umfang durch die Endpunkte der gegebenen Linie geht und trage diese in demselben sechsmal herum.

§. 170. Zus. Um ein ordentliches Dreieck in einem Kreise zu beschreiben, zeichne man zuerst ein ordentliches Sechseck, und verbinde dann je zwei Seiten desselben durch eine gerade Linie.

§. 171. Aufg. Ein ordentliches Vieleck von gegebener Anzahl Seiten um den Kreis zu beschreiben.

Aufl. Zuerst beschreibe man ein ordentliches Vieleck von eben so viel Seiten in den Kreis. Auf die Seiten desselben lasse man dann aus dem Mittelpunkte Perpendikel herab und verlängere sie bis an die Peripherie. Durch die Durchschnittspunkte ziehe man gleichlaufend mit den Seiten des einbeschriebenen Vielecks gerade Linien bis zu den verlängerten Halbmessern, die durch die Ecken des innern Polygons gehen: so erhält man das verlangte Vieleck (Fig. 57.).

§. 172. Aufg. Den Inhalt eines ordentlichen Vielecks zu finden.

Aufl. Man berechne den Inhalt eines von den gleichen Dreiecken, in welche das Vieleck getheilt werden kann und nehme diesen Inhalt so oft als das Vieleck Seiten hat; oder eines solchen Dreiecks halbe Höhe mit dem Umfange multiplicirt gibt den Inhalt des Vielecks.

§. 173. Zus. Ein ordentliches Vieleck ist an Fläche einem Dreiecke gleich, welches den Umfang zur Grundlinie und die senkrechte Linie vom Mittelpunkte auf die Seite zur Höhe hat.

§. 174. Lehrs. Die Umfänge ähnlicher ordentlicher Vielecke verhalten sich wie die Halbmesser oder Durchmesser der um sie beschriebenen Kreise.

Bew. Die Umfänge verhalten sich wie die Seiten, z. B. wie AB zu ab (Fig. 58.); aber wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ist auch $AB : ab = AG : aG = 2 . AG : 2 . aG$. Demnach verhalten sich auch die Umfänge wie $AG : aG = AD : ad$.

Das Nämliche wird gezeigt von den Umfängen ähnlicher ordentlicher Vielecke, die um den Kreis beschrieben sind.

§. 175. Aufg. Aus der Seite eines ordentlichen Vielecks und dem Halbmesser des umschriebenen Kreises die Seite des Vielecks von doppelt so viel Seiten zu finden.

Aufl. Die bekannte Seite sei $AB = a$ (Fig. 59.); die zu suchende $AE = x$. Ferner sei $AC = EC = r$ und durch die senkrechte CD ist $AD = \frac{1}{2} a$. Nun ist $CD^2 = r^2 - \frac{1}{4} a^2$ und $CD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}$; überdieß $DE^2 = (CE - CD)^2 = r^2 - 2r . \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)} + r^2 - \frac{1}{4} a^2 = 2r^2 - 2r . \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)} - \frac{1}{4} a^2$. Daraus findet man

$$x^2 = \frac{1}{4} a^2 + 2r^2 - 2r . \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)} - \frac{1}{4} a^2$$
$$= 2r^2 - 2r . \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}$$

und $x = \sqrt{(2r^2 - 2r \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)})}$

Setzt man hier $r = 1$, so ist $x = \sqrt{(2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4}a^2)})}$

§. 176. Zus. Aus der Seite des Sechsecks, die dem Halbmesser gleich ist, kann man nun leicht für $r = 1$ die Seite des Zwölfecks, daraus die des 24ecks, des 48ecks, des 96ecks u. s. w. berechnen. Man wird des 12ecks Seite = 0,517638090205 .... und des 768ecks Seite = 0,0081812 .... finden.

§. 177. Zus. Je mehr Seiten ein Vieleck hat, desto mehr nähert es sich dem Kreise, und desto weniger ist die Höhe der Dreiecke, worein es durch die Halbmesser getheilt wird, von des Halbmessers Größe verschieden. Bleibt nun auch der Bogen immer größer als seine Sehne, so kann man doch durch Vervielfältigung der Seiten den Unterschied so klein machen, daß er für Nichts angesehen werden kann. Es wird daher ein Vieleck von unendlich vielen Seiten einem Kreis gleich geachtet und umgekehrt. Daher gilt auch von Kreisen, was von ordentlichen Vielecken bewiesen worden ist, namentlich

1) die Peripherien der Kreise verhalten sich zu einander, wie ihre Halbmesser oder Durchmesser;

2) der Kreis ist am Flächeninhalte einem Dreiecke gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

§. 178. Nach dieser Ansicht hat schon Archimedes den Umfang des Kreises zu berechnen gesucht. Er führte die Rechnung fort bis zu einem in und um den Kreis beschriebenen Sechsundneunzigeck und fand, den Durchmesser = 1 gesetzt, des ersten Vielecks Umfang = $3\frac{10}{71}$ und des andern Umfang = $3\frac{10}{70}$, so daß also des Kreises Peripherie zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$ fällt. Man meint die größere Zahl, wenn man das archimedische Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie anführt und drückt es durch 7 : 22

oder 1 : 3,14 aus. Adrian Metius fand es, wie 113 zu 355. Gegenwärtig ist dieses Verhältniß so genau berechnet, als man es in der Ausübung nie braucht. Schon Ludolph van Ceulen hat das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang = 1 : 3,141592 653589 793238 462643 383279 50 gefunden. Jetzt kennt man es schon bis zu 200 Stellen. In der Ausübung nimmt man so viel Stellen, als die Genauigkeit und Schärfe verlangt; in sehr vielen Fällen reichen schon zwei oder drei Stellen hin. Der Kürze wegen setzt man die Zahl 3,141592.... = π. Alsdann ist $\frac{1}{\pi}$ = 0,318309 886183 .... und $\frac{1}{4\pi}$ = 0,079577 471545 ....

§. 179. Aufg. Den Umfang eines Kreises aus seinem Durchmesser oder Halbmesser zu berechnen.

Aufl. Wenn man den Durchmesser mit d, den Halbmesser mit r und die Peripherie mit p bezeichnet, so hat man folgende Proportion

$1 : \pi = d : p$ und $p = \pi \,.\, d$

oder $1 : \pi = 2r : p$ und $p = \pi \,.\, 2r$

§. 180. Zus. Daraus ergibt sich $d = \frac{p}{\pi} = p \,.\, \frac{1}{\pi} = p \,.\, 0{,}318309 \ldots$ und $r = p \,.\, 0{,}159154 \ldots$

§. 181. Aufg. Den Flächeninhalt eines Kreises aus seinem Durchmesser oder Halbmesser zu finden.

Aufl. Weil der Kreis einem Dreiecke gleich ist, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat, so ist, wenn der Flächeninhalt mit a bezeichnet wird,

$a = \frac{1}{2} r \,.\, p = \frac{1}{2} r \,.\, \pi \,.\, 2r = \pi \,.\, r^2$

oder $a = \frac{1}{4} d \,.\, p = \frac{1}{4} \pi \,.\, d^2 = d^2 \,.\, 0{,}785398\ 163397 \ldots$

§. 182. Zus. Aus $a = \frac{1}{2} p \,.\, r$ wird

$a = p^2 \,.\, 0{,}07957747 \ldots$

und $p = (\sqrt{a}) \,.\, 3{,}5449077 \ldots$

Aus $\frac{1}{4} \pi \,.\, d^2 = a$ wird

$d = (\sqrt{a}) . 1,128378 \ldots$

$r = (\sqrt{a}) . 0,564189 \ldots$

§. 183. Aufg. Die Länge eines in Graden gegebenen Bogens aus dem Durchmesser oder Halbmesser zu finden.

Aufl. Die Anzahl der Grade sei n, so findet offenbar folgende Proportion Statt

$$360^\circ : n = \pi . d : \text{Länge}$$

und Länge oder $l = \frac{n . \pi . d}{360} = \frac{n . \pi . r}{180}$.

§. 184. Zus. Für $r = 1$ ist die Länge eines Bogens von

1 Grad $= 0,017453292 \ldots$

1 Minute $= 0,000290888 \ldots$

1 Sekunde $= 0,000004848 \ldots$

§. 185. Zus. Aus $l = \frac{n . \pi . r}{180}$ findet man $n = \frac{180 . l}{\pi . r} = \frac{l}{r} . 57,295779 \ldots$ und $r = \frac{l}{n} . 57,295779 \ldots$

§. 186. Aufg. Den Inhalt eines Kreisausschnittes zu berechnen.

Aufl. Gleich der Kreisfläche muß natürlich auch der Kreisausschnitt einem Dreiecke gleich sein, dessen Höhe der Halbmesser und die Grundlinie der Bogen des Ausschnitts ist. Demnach ist dieser Inhalt $a = \frac{1}{2} r . \frac{n . \pi . r}{180} = 0,008726 . n . r^2$.

§. 187. Zus. Um den Kreisabschnitt ABDA (Fig. 60.) zu berechnen, sucht man erst den Ausschnitt ACBDA und das Dreieck ABC. Der Unterschied zwischen diesen beiden gibt den Inhalt des Abschnittes.

§. 188. Lehrs. Bei gleichem Inhalte ist des Kreises Umfang kleiner als des Quadrates Umfang.

Bew. Beider Figuren gleicher Inhalt sei a, so verhält sich

Umf. des Kr. : Umf. des Quadr. $= 3{,}54 . \sqrt{a} : 4 . \sqrt{a} = 3{,}54 : 4$

§. 189. Lehrs. Die Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

Bew. Des einen Kreises Fläche sei F, sein Halbmesser R und der Durchmesser D. Durch f, r, d werde das Nämliche im andern Kreise bezeichnet, so ist

$$F : f = \pi . R^2 : \pi . r^2 = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

§. 190. Lehrs. Die Kreisfläche verhält sich zum Quadrate ihres Durchmessers wie der vierte Theil der Peripherie zum Durchmesser.

Bew. Es verhält sich

Kreis : Quadrat $= \frac{1}{4}\pi . d^2 : d^2 = \frac{1}{4}\pi . d : d$

§. 191. Zus. Für $d = 1$ verhält sich

Kreis : Quadrat $= \frac{1}{4}\pi : 1 = 0{,}785 : 1.$

§. 192. Lehrs. Das Quadrat um den Kreis ist doppelt so groß als das Quadrat in dem Kreise.

Bew. Man ziehe aus dem Mittelpunkte C nach den Ecken des eingeschriebenen Quadrates gerade Linien und durch I und K gleichlaufend mit AB die Linien $DE = FG = AB$; eben so durch A und B die Linien DF und EG parallel und gleich der IK, so ist DEGF das Quadrat um den Kreis, und um C sind lauter rechte Winkel. Nun ist $DF^2 = IK^2 = IB^2 + BK^2 = 2 . IB^2$ oder $DFGE = 2 . AIBK$.

§. 193. Aufg. Den Inhalt eines Ringes oder derjenigen Fläche zu finden, welche zwischen den Peripherien zweier koncentrischer Kreise enthalten ist.

Aufl. Von dem Inhalte des größern Kreises, dessen Halbmesser $= R$ ist, ziehe man ab den Inhalt des kleinern, dessen Halbmesser $= r$ ist; der Rest gibt den verlangten Inhalt des Ringes $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi . (R^2 - r^2) = \frac{1}{4} . \pi (D^2 - d^2)$.

§. 194. Zus. Der Inhalt des Ausschnitts eines solchen Ringes wird gefunden, wenn man von dem Ausschnitte ACB (Fig. 62.) den Ausschnitt DCE abzieht; oder, wenn *n* die Anzahl der Grade des Bogens AB bedeutet, durch folgenden Ansatz:

$360^\circ : n =$ der ganze Ring : Ausschnitt ABED

Körperliche Geometrie.

§. 195. Man denke sich durch zwei Punkte eine Ebene gelegt, so ist dieselbe in Hinsicht ihrer Lage ganz unbestimmt; denn man kann sie um die gerade Linie, welche jene zwei Punkte verbindet, drehen, und dadurch in jede Lage bringen. Denkt man sich aber eine Ebene durch drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie befindlich sind, gelegt, so ist die Lage der Ebene vollkommen bestimmt. Und alle Ebenen, welche durch die nämlichen drei Punkte gehen, müssen zusammen fallen.

§. 196. Eine Linie steht **senkrecht** auf einer Ebene, wenn sie mit allen geraden Linien, welche durch den Punkt des Zusammentreffens gezogen werden können, rechte Winkel macht.

§. 197. Eine gerade Linie ist mit einer Ebene **gleichlaufend**, wenn man beide, so weit man will, verlängern kann, ohne daß sie irgendwo zusammen stoßen. Ebenen heißen **gleichlaufend**, wenn sie nach allen Seiten verlängert nirgends zusammen kommen.

§. 198. Lehrs. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine gerade Linie.

Bew. Der Durchschnitt muß in beiden Ebenen KL und MN (Fig. 63.) zugleich liegen; wäre er nun nicht eine gerade Linie AB, sondern etwa eine krumme ACB, so könnte diese nicht in beiden Ebenen zugleich sein, da durch drei Punkte A, C, B, die nicht in gerader Linie liegen, nur Eine Ebene Statt findet.

§. 199. Lehrs. Wenn zwei gleichlaufende Ebenen von einer dritten durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien auch gleichlaufend.

Bew. Die Durchschnitte der Ebenen sind gerade Linien, die den drei Ebenen gemeinschaftlich sind. Da aber die beiden parallelen Ebenen nirgends zusammen stoßen können, so können es auch keine Theile von ihnen, wie die gedachten Durchschnittslinien. Diese sind aber auch zugleich in einer und derselben Ebene, nämlich in der durchschneidenden; sie sind daher, weil sie nirgends zusammen treffen, parallel.

§. 200. Lehrs. Eine gerade Linie kann auf zwei Ebenen, welche einander schneiden, nicht zugleich senkrecht sein.

Bew. Wenn die Linie AB (Fig. 64.) auf beiden Ebenen senkrecht wäre, so müßten im Dreiecke ABC die beiden Winkel A und B allein schon zwei rechte ausmachen, was unmöglich ist.

§. 201. Zus. Wenn daher eine gerade Linie auf zwei Ebenen senkrecht steht, so können diese sich nicht schneiden und sind also parallel. Und wenn eine Linie auf einer von zweien parallelen Ebenen senkrecht steht, so ist sie auch auf der andern senkrecht.

§. 202. Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist derjenige Winkel, welcher entsteht, wenn man aus einem willkührlichen Punkte des Durchschnittes in jeder Ebene eine senkrechte Linie auf die Durchschnittslinie zieht. Ist der Neigungswinkel ein rechter, so stehen die Ebenen senkrecht auf einander. Die Neigung einer Ebene zu einer andern heißt ein ebener Winkel.

§. 203. Lehrs. Eine gerade Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf zwei geraden Linien in ihr, im Durchschnittspunkte derselben, senkrecht steht.

Bew. Man ziehe in der Ebene MN (Fig. 65.) durch

den Durchschnittspunkt C, wo sich EF und GH treffen, nach Belieben noch eine dritte gerade Linie AB, nehme EC = CF, GC = CH und ziehe EG und FH, so ist EG = FH und W. G = W. H. Die Dreiecke CGA und CHB sind ebenfalls einander gleich; daher GA = BH und AC = BC.

Nun ziehe man die Linien DE, DA, DG und DF, DB, DH, so wird DE = DF und DG = DH; demnach sind die Dreiecke DGE und DFH gleich und W. DGE = W. DHF. Jetzt sind auch die Dreiecke DAG und DBH gleich und DA = DB; daher auch Dr. DAC = Dr. DBC und W. DCA = W. DCB; folglich steht DC auf AB senkrecht, und weil dieser Beweis von allen geraden Linien, die durch den Punkt C in der Ebene MN gezogen werden können, gilt: so steht DC auf der ganzen Ebene senkrecht.

§. 204. Zus. Die senkrechte Linie, die von einem Punkte außerhalb einer Ebene auf dieselbe gezogen werden kann, ist die kürzeste, und daher dieses Punktes Entfernung von der Ebene. Und die kürzeste Linie ist allemal senkrecht.

§. 205. Zus. Aus einem Punkte in einer Ebene ist nur Ein Perpendikel möglich; und ebenso von einem Punkte außerhalb einer Ebene auf dieselbe.

§. 206. Zus. Die Durchschnittslinie GL (Fig. 64.) zweier Ebenen steht auf der Ebene ABC ihres Neigungswinkels senkrecht.

§. 207. Lehrs. Wenn von zwei gleichlaufenden Linien die eine auf einer Ebene senkrecht ist, so ist es auch die andere.

Bew. Die gleichlaufenden Linien seien AB und CD (Fig. 66.). Nun ziehe man BD und DA, welche beide Linien in der Ebene liegen, die durch die parallelen AB und CD gelegt werden kann; ferner setze man DE senkrecht auf BD so,

daß DE = BA werde und ziehe BE, so wird AD = BE. Nun ziehe man auch AE, so ist in den gleichen Dreiecken AEB und AED der W. ABE = Q = ADE und nun ist DE auf BD und auf AD senkrecht, und daher auf der ganzen Ebene ABDC senkrecht. Darum ist aber auch DC senkrecht auf DE. Weil nun W. CDB = 2 Q — ABD = Q ist, so steht CD auch auf DB und daher auf der ganzen Ebene senkrecht.

§. 208. Zus. Zwei gerade Linien, die auf einerlei Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

§. 209. Lehrs. Wenn zwei Linien mit einer dritten parallel sind, so sind sie unter sich selbst parallel, wenn gleich nicht alle drei in einerlei Ebene liegen.

Bew. In der Ebene CDEF ziehe man DE senkrecht auf EF (Fig. 66.) und eben so BE in der Ebene ABEF, so ist EF auf der durch BDE gelegten Ebene senkrecht; mithin sind die mit EF parallelen Linien AB und CD auch auf derselben Ebene senkrecht, folglich unter sich parallel.

§. 210. Lehrs. Winkel in verschiedenen Ebenen sind gleich, wenn ihre Schenkel parallel sind.

Bew. Die Winkel seien ABC und DEF (Fig. 67.) und BA || ED und BC || EF. Nun mache man BA = ED und BC = EF, so ist AD mit BE und CF mit BE parallel und gleich, und daher auch AC = DF. Demnach ist Dr. ABC = Dr. DEF, folglich auch W. ABC = W. DEF.

§. 211. Zus. Darum findet man den Neigungswinkel ACB (Fig. 64.) zweier Ebenen von gleicher Größe, man mag den Punkt C in der Durchschnittslinie GL nehmen, wo man will.

§. 212. Aufg. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen.

Aufl. In der Ebene MN (Fig. 68.) ziehe man nach

Belieben eine gerade Linie DE und fälle auf sie von dem gegebenen Punkte A ein Perpendikel AF. Wenn dieses nicht schon selbst das verlangte Perpendikel ist, so ziehe man durch F in der Ebene MN die Linie FG senkrecht auf DE und fälle aus A das Perpendikel AG auf FG, so wird AG das verlangte Perpendikel auf MN sein.

§. 213. Aufg. Aus einem Punkte in einer Ebene eine senkrechte Linie zu errichten.

Aufl. Aus einem willkührlichen Punkte A (Fig. 68.) außerhalb der Ebene fälle man ein Perpendikel AG auf die Ebene und ziehe durch den in der Ebene gegebenen Punkt H eine Linie HI parallel mit GA, so ist diese HI das verlangte Perpendikel.

§. 214. Lehrs. Wenn auf einer Ebene eine gerade Linie senkrecht steht, so ist jede durch diese Linie gelegte Ebene auch auf jener Ebene senkrecht.

Bew. Die senkrechte Linie sei AB (Fig. 69.); die durch dieselbe gelegte Ebene KL schneide die Ebene MN in der geraden Linie DL, welche durch den Punkt B gehen muß. Nun ziehe man CB senkrecht auf DL, so ist, weil auch AB auf BC senkrecht steht, beider Ebenen Neigungswinkel ABC ein rechter Winkel; folglich stehen beide Ebenen auf einander senkrecht.

§. 215. Lehrs. Zwei sich schneidende Ebenen sind auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht.

Bew. Die Linie GC (Fig. 64.), die zu den beiden sich schneidenden Ebenen gehört, ist sowohl auf CA als auf CB senkrecht und daher auch auf der Ebene ACB; folglich stehen auch beide durch GL gelegte Ebenen ML und KL auf der Ebene ACB senkrecht.

§. 216. Lehrs. Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht sind und in der einen eine Linie auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt senkrecht steht, so ist dieselbe auch auf der andern Ebene senkrecht.

Bew. In der Ebene MN (Fig. 69.), auf welcher KL senkrecht steht, ziehe man durch B, wo die senkrechte AB aufsteht, ein Perpendikel BC auf DL, so ist ABC der Neigungswinkel, welcher ein rechter ist; folglich steht AB auch auf MN senkrecht.

§. 217. Lehrs. Parallellinien auf einerlei Ebene machen mit derselben gleiche Neigungswinkel.

Bew. Von den obern Punkten der Parallelen AC und DE (Fig. 70.) ziehe man senkrechte Linien AB und DF auf die Ebene MN, so sind diese auch parallel und W. CAB = W. EDF. Aber W. B = W. F; demnach auch W. C = W. E oder die Neigungen sind gleich.

§. 218. Lehrs. Wenn zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht stehen, so ist auch ihre Durchschnittslinie auf derselben senkrecht.

Bew. Die sich schneidenden Ebenen seien GH und KL (Fig. 71.), welche auf MN senkrecht stehen. In der Ebene MN ziehe man CB senkrecht auf BH und ebenso DB auf KB, so ist, weil die Ebenen MN und GH gegen einander senkrecht sind, BC auf der Ebene GH und daher auch auf AB senkrecht, und aus gleichem Grunde DB auf AB senkrecht. Da nun AB sowohl auf BC als auf BD senkrecht steht, so ist AB auf der ganzen Ebene MN senkrecht.

§. 219. Wenn von einem jeden Winkel einer Figur gerade Linien nach einem außerhalb derselben befindlichen Punkte A (Fig. 72.) gezogen werden, so entstehet bei diesem Punkte ein körperlicher Winkel, der aus so viel ebenen Winkeln besteht, als die Figur Seiten hat. Der Punkt A heißt des körperlichen Winkels Scheitel, und die nach A gezogenen Linien, wie BA, CA, DA, seine Seitenlinien oder Kanten. Es leuchtet ein, daß zur Bildung eines körperlichen Winkels wenigstens drei ebene Winkel gehören.

§. 220. Lehrs. Von den drei ebenen Winkeln, welche

einen körperlichen bilden, sind zwei zusammen genommen größer als der dritte.

Bew. Es sei DAC (Fig. 72.) der größte, so nehme man in seiner Ebene EAC = BAC und mache AE = AB, so ist auch CE = CB. Nun ist BD + BC > DC; daher BD > DE; folglich W. BAD > W. DAE; demnach auch BAD + BAC > DAE + EAC d. i. BAD + BAC > DAC.

§. 221. Lehrs. Die ebenen Winkel, welche einen körperlichen bilden, sind zusammen kleiner als vier Rechte.

Bew. Durch die Ebene BDC (Fig. 72.) schneide man den körperlichen Winkel oder die Ecke A ab, so entstehen auch bei B, C und D solche Ecken, und es ist ACB + ACD > BCD; ABC + ABD > CBD; ADB + ADC > BDC. Je zwei der erstern Winkel, wie ACB + ABC, werden durch einen von den Winkeln, die die Ecke A bilden, wie BAC, zu 2 Q ergänzt, welches so oft geschieht, als ebene Winkel zur Bildung der Ecke A vorhanden sind. Denkt man sich nun in der Ebene BCD einen Punkt und zieht von ihm nach B, C, D gerade Linien, so entstehen allemal so viele Dreiecke, als um die Ecke A herumliegen. Die vorigen letztern Winkel BCD, CBD und BDC gehören zu jenen Dreiecken und werden gleichfalls paarweise zu 2 Q durch diejenigen Winkel ergänzt, welche um den in der Ebene BCD gewählten Punkt herumliegen, d. h. durch 4 Q. Da aber die erstern Winkel größer als die letztern sind, so ist ihre Ergänzung kleiner als die der letztern d. h. kleiner als 4 Q. Folglich betragen die zur Bildung einer Ecke gehörigen Winkel weniger als 4 Q.

§. 222. Die Körper können entweder von ebenen oder von krummen Flächen begrenzt werden, oder von beiderlei zugleich. Die ersten nennt man Polyëdra, und diejenigen Körper, in welchen alle Winkel gleich sind und alle ebenen

Seitenflächen einander decken, heißen ordentliche oder reguläre.

§. 223. Lehrs. Es gibt nur fünf reguläre Körper.

Bew. 1) Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks hält 60°; also machen drei solche Winkel 180°; und da an einem Körper wenigstens vier Seitenflächen sein müssen, so können vier gleichseitige Dreiecke einen Körper begrenzen, welcher Tetraëdron heißt und vier Winkel hat.

2) Vier solche Dreieckswinkel, da sie zusammen 240° betragen, können gleichfalls Ecken bilden. Ein von acht solchen gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper heißt Oktaëdron und hat sechs Ecken.

3) Fünf solche Dreieckswinkel machen zusammen 300° und bilden daher noch ein Eck. Der von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzte Körper heißt Ikosaëdron und hat 12 Winkel. Aber von sechs und mehren solchen Dreieckswinkeln läßt sich kein Eck weiter bilden.

4) Drei Winkel eines Quadrates betragen 270° und können daher eine Ecke bilden; aber vier machen 360°. Darum kann nur Ein Körper von Quadraten begrenzt werden, nämlich der Würfel oder Kubus, welcher 6 Seitenflächen und 8 Winkel hat.

5) Von regulären Fünfecken kann auch nur Ein Körper begrenzt werden. Jeder Winkel desselben hat $3 \times 108 = 324°$ und ihre Anzahl ist 20 mit 12 Seitenflächen, wovon er Dodekaëdron heißt.

Von regulären Sechs-, Sieben-, Acht-Ecken u. s. w. läßt sich kein körperlicher Winkel mehr zusammensetzen, indem dieser Figuren Winkel mit ihrer Zunahme wachsen.

§. 224. Derjenige Körper, welcher von zwei parallelen gleichen und ähnlichen ebenen Grundflächen und von so viel Parallelogrammen, als jede Grundfläche Seiten hat, begrenzt wird, heißt ein Prisma (Pfeiler, Ecksäule). Diese Parallelogramme werden die Seitenflächen genannt,

und die Linie, welche sich durch die Winkelpunkte zieht, Seiten oder Kanten. Nach der Anzahl der Seiten der Grundflächen heißen die Prismen dreiseitig, vierseitig u. s. w. Stehen die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht, so hat man ein senkrechtes; im entgegengesetzten Falle aber ein schiefes Prisma. Sind des Prisma Grundflächen Parallelogramme, so heißt es ein Parallelepipedum. Ein senkrechtes Prisma, welches Quadrate zu Grundflächen und Seitenflächen hat, ist ein Würfel oder Kubus.

§. 225. Ein prismatischer Körper kann auch gleiche Kreise zu Grundflächen haben; ein solcher heißt Cylinder (Walze), und wird von einer krummen Seitenfläche begrenzt. Die gerade Linie, welche durch beider Grundflächen Mittelpunkt geht, wird die Achse genannt, und eine gerade Linie in der krummen Außenfläche, welche mit der Achse gleichlaufend ist, eine Seite. Der Cylinder ist senkrecht oder schief, je nachdem seine Achse mit den Grundflächen rechte oder schiefe Winkel macht.

§. 226. Lehrs. Wenn ein Prisma mit der Grundfläche parallel durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt mit der Grundfläche kongruent.

Bew. Die Seiten der Durchschnitte (Fig. 73.) sind gleich den Seiten der Grundfläche, weil es Parallelen zwischen Parallelen sind, und die Winkel sind auch gleich, weil ihre Schenkel parallel sind, folglich die Figuren kongruent.

§. 227. Zus. Jeder Durchschnitt, der im Cylinder mit der Grundfläche parallel geschieht, ist ein der Grundfläche gleicher Kreis.

§. 228. Die Höhe eines Prisma ist ein Perpendikel zwischen den beiden Grundflächen.

§. 229. Lehrs. Die Oberfläche eines senkrechten Prisma ohne die beiden Grundflächen ist gleich dem Pro-

dukte aus der Höhe desselben in den Umfang der Grundfläche.

Bew. Die Seitenflächen eines senkrechten Prisma, welche die besprochene Oberfläche bilden, sind Rechtecke, sämmtlich von gleicher Höhe. Der Inhalt ihrer Summe beträgt daher so viel als der Inhalt eines Rechtecks von eben der Höhe, das zur Grundlinie den ganzen Umfang der Grundfläche hat.

§. 230. Zus. Daher ist auch die krumme Oberfläche eines senkrechten Cylinders einem Rechtecke gleich, das die Seite des Cylinders zur Höhe und den Umkreis der Grundfläche zur Grundlinie hat.

§. 231. Lehrs. Jedes Parallelepipedum wird durch eine Diagonalebene in zwei kongruente dreiseitige Prismen getheilt.

Bew. Wenn man die Diagonalebene CDEF (Fig. 74.) gezogen denkt, so ist Dr. CGF = Dr. CBF und Dr. DAE = Dr. DHE; ferner sind die Parallelogramme CA und BE, so wie GE und CH kongruent; die Diagonalebene aber ist beiden Körpern, welche durch sie abgeschnitten werden, gemeinschaftlich. Da nun beide Körper völlig in einerlei Grenzen eingeschlossen sind, so kann man einen in den Raum des andern setzen, so daß alle Grenzen auf einander fallen; folglich decken sich beide Körper und jeder ist die Hälfte des Ganzen.

§. 232. Lehrs. Parallelepipeda, welche einerlei Grundflächen und Höhen haben, sind gleich am Inhalte.

Bew. Da Körper, welche völlig von gleichen Flächen, die unter gleichen Winkeln zusammengesetzt sind, begrenzt werden, einander decken und gleich sind, so ist (Fig. 75.) GACMLGH = FBDIKFE. Von diesen gleichen Körpern ziehe man den gemeinschaftlichen Körper FNPMLFE ab und addire zu beiden gleichen Resten den Körper ABCDPNA, so wird ABCDEFGH = ABCDIKLM.

§. 233. Zus. Daher haben auch die Hälften d. h. dreiseitigen Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen einerlei Inhalt. Und da alle Vielecke, ja selbst der Kreis auf Dreiecke zurück gebracht werden können, so steht der allgemeine Satz fest: Prismen und Cylinder von gleichen Grundflächen und Höhen haben gleichen Inhalt.

§. 234. Einen Körper ausmessen oder seinen körperlichen Inhalt finden, heißt untersuchen, wie oft ein zur Einheit genommener Körper in jenem enthalten ist. Der zur Einheit gewählte Körper ist der Kubus; daher der Name Kubikmaaß, Kubikinhalt.

§. 235. Aufg. Den Kubikinhalt eines Prisma zu finden.

Aufl. 1) Wir gehen vom senkrechten Parallelepipedum aus und erkennen, daß ein Kubus so oft auf des Parallelepipedums Grundfläche stehen kann, als die Grundfläche des Kubus in der des Parallelepipedums enthalten ist. Diese Anzahl hat aber so vielmal Raum, als die Höhe des Kubus in der Höhe des Parallelepipedums begriffen ist. Das Produkt der Grundfläche in die Höhe des Parallelepipedums gibt also die Anzahl der in demselben enthaltenen Kubusse oder den Kubikinhalt. Drückt man die drei Abmessungen der Länge, Breite und Höhe durch a, b, c aus, so ist des senkrechten Parallelepipedums Kubikinhalt $k = a \cdot b \cdot c$.

2) Da aber alle Prismen von einerlei Grundflächen und Höhen gleichen Inhalt haben, so findet man eines jeden Prisma Kubikinhalt, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt. Drückt man jene durch g und diese durch h aus, so ist des Prisma Kubikinhalt $k = g \cdot h$.

§. 236. Zus. Beim Kubus sind Länge, Breite und Höhe einander gleich oder $a = b = c$; daher $k = a^3$ und $a = \sqrt[3]{k}$.

§. 237. Zus. Wenn der Fuß als Längeneinheit genommen, und derselbe zu 10 Zoll gerechnet wird, so faßt der Kubikfuß $10^3 = 1000$ Kubikzoll; ebenso hält der Kubikzoll 1000 Kubiklinien; aber nach der zwölftheiligen Eintheilung hat der Kubikfuß $12^3 = 1728$ Kubikzoll u. s. w. — welches bei der Verwandelung der größern Maaße in kleinere und umgekehrt wohl zu berücksichtigen ist.

Die Kubikfuße verschiedener Länder und Städte verhalten sich, wie die Kubikzahlen ihrer Längenfuße. So verhält sich z. B. der bairische Kubikfuß zum rheinländischen $= 129{,}38^3 : 139{,}13^3$.

§. 238. Zus. Bei gleicher Bezeichnungsart ist auch des Cylinders Kubikinhalt $k = g \cdot h$ oder wenn der Durchmesser durch d und der Halbmesser durch r ausgedrückt wird, so ist $k = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot h$. Hieraus ist $h = \frac{k}{d^3} \cdot 1{,}273 \ldots.$ und $d = 1{,}128 \cdot \sqrt{\frac{k}{h}}$.

§. 239. Zus. Wenn K, H, D, R die nämlichen Sachen bei einem andern Cylinder bedeuten, so ist $K = \frac{1}{4}\pi \cdot D^2 \cdot H = \pi \cdot R^2 \cdot H$; folglich

$$K : k = \pi \cdot R^2 \cdot H : \pi r^2 \cdot h = R^2 \cdot H : r^2 \cdot h.$$

Ist nun $H = h$, so ist $K : k = R^2 : r^2$. Für $R = r$ ist $K : k = H : h$ und für $K = k$ ist $R^2 \cdot H = r^2 \cdot h$ folglich $H : h = r^2 : R^2$.

§. 240. Zus. Haben die beiden Cylinder gleiche Höhe h, so ist ihre Summe $= \frac{1}{4}\pi \cdot h (D^2 + d^2) =$ einem Cylinder von derselben Höhe, dessen Durchmesser $= \sqrt{(D^2 + d^2)}$ und dessen Grundfläche die Summe der Grundflächen von beiden ist.

§. 241. Zus. Sowohl für Prismen als für Cylinder ist $h = \frac{k}{g}$ und $g = \frac{k}{h}$.

§. 242. Lehrs. Prismen und Cylinder, welche einerlei Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundflächen, und bei gleichen Grundflächen wie ihre Höhen.

Bew. 1) Des einen Körpers K Grundfläche sei G; des andern k Grundfläche g; ihre gleichen Höhen aber sei H, so ist

$$K : k = G . H : g . H = G : g$$

2) Die verschiedenen Höhen seien H und h; und die gleichen Grundflächen G. Alsdann ist

$$K : k = G . H : G . h = H : h.$$

§. 243. Man nennt ähnliche Körper solche, deren Seitenflächen nach der Ordnung ähnlich und unter gleichen Winkeln gegen einander geneigt sind. Prismen sind ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Figuren sind, und ihre Seitenlinien einerlei Neigung und Verhältniß gegen die gleichliegenden Seiten der Grundflächen haben.

§. 244. Lehrs. Aehnliche Prismen verhalten sich wie die Würfel ihrer gleichliegenden Seiten.

Bew. Wir fangen mit ähnlichen rechtwinkligen Parallelepipeden an, in deren einem K die drei Abmessungen der Länge, Breite und Höhe durch a, b, c und in dem andern k durch α, β, γ bezeichnet werden sollen. Da ist denn

$$K : k = a . b . c : \alpha . \beta . \gamma$$

Aber wegen Aehnlichkeit der Grundflächen und Seitenflächen ist $a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$; also $\beta = \frac{\alpha b}{a}$ und $\gamma = \frac{\alpha c}{a}$. Demnach ist auch

$$K : k = abc : \frac{\alpha^3 bc}{a^2} = a^3 : \alpha^3$$

Schiefwinklige Parallelepipeda lassen sich in rechtwinklige verwandeln; dreieckige Prismen sind Hälften derselben und vieleckige können durch Diagonalebenen in dreieckige zerlegt werden; folglich gilt von allen Prismen die über die rechtwinkligen Parallelepipeda gefundene Wahrheit.

§. 245. Aufg. Die Seite eines Würfels zu finden, dessen Inhalt doppelt so groß ist, als der eines andern gegebenen.

Aufl. Des gegebenen Würfels (A) Seite sei a; des doppelt so großen (B) Seite x; so ist $A : B = a^3 : x^3$ oder $1 : 2 = a^3 : x^3$; woraus $x^3 = 2 . a^3$ und $x = a . 1,259921 \ldots$

§. 246. Derjenige Körper, welcher begrenzt wird von einer ebenen Grundfläche und von so vielen, in einem gemeinschaftlichen Punkte zusammenlaufenden Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat, heißt eine Pyramide. Die von den Ecken der Grundfläche nach der Spitze laufenden Linien werden Kanten oder Seitenlinien genannt. Sind diese gleichlang, so heißt die Pyramide gleichseitig. Von der Anzahl der Seiten, welche die Grundfläche hat, nennt man die Pyramide dreiseitig, vierseitig u. s. w. Ihre Höhe ist die senkrechte Linie von der Spitze auf die Grundfläche. Wenn die Grundfläche ein Kreis ist, so heißt die Pyramide insbesondere ein Kegel, dessen Achse eine gerade Linie von der Spitze oder dem Scheitel nach dem Mittelpunkte der Grundfläche ist. Steht die Achse auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel senkrecht, im entgegengesetzten Falle schief. Die gerade Linie von der Spitze nach dem Umfange der Grundfläche wird die Seite genannt.

§. 247. Lehrs. Jeder mit der Grundfläche parallel geführte Schnitt der Pyramide ist der Grundfläche ähnlich. (Fig. 76.)

Bew. Die Seiten des Schnitts sind den Seiten der Grundfläche parallel; daher ist BC : bc = CA : Cc = CD : cd und so rings herum d. h. die Seiten des Schnitts sind mit den Seiten der Grundfläche proportional. Die Winkel des Schnitts aber sind denen der Grundfläche gleich, weil die Schenkel parallel sind. Folglich sind beide Figuren ähnlich.

§. 248. Zus. Eines Kegels Schnitt, der mit der Grundfläche parallel geschieht, ist ein Kreis.

§. 249. Lehrs. Die Grundfläche einer Pyramide verhält sich zu einem ihr parallelen Schnitt, wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.

Bew. Weil Grundfläche und Schnitt ähnlich sind, so ist $BD : bd = BC^2 : bc^2$. Aber $BC : bc = AC : Ac = AE : Ae$; folglich $BD : bd = AE^2 : Ae^2$.

§. 250. Zus. Daher ist die Fläche $bd = \frac{Ae^2}{AE^2} . BD$ d. h. bei Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind alle Schnitte in gleichen Höhen über der Grundfläche gleichgroß. Auch haben Pyramiden von gleichen Höhen und gleichgroßen Grundflächen einerlei Inhalt.

§. 251. Zus. Diese zwei Wahrheiten (§. 249 und 250.) gelten auch von den Kegeln.

§. 252. Lehrs. Die Oberfläche einer senkrechten Pyramide ist ohne die Grundfläche gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche in das halbe Loth, welches von der Spitze auf irgend eine Seite der Grundfläche gefällt wird.

Bew. Die gleiche Höhe aller Seitenflächen sei h; die Seiten der Grundfläche seien a, b, c, d .... so ist offenbar die gedachte Oberfläche $= (a + b + c + d + ...) . \frac{1}{2} h$.

§. 253. Zus. Eines senkrechten Kegels Oberfläche

ist einem Dreiecke gleich, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Seite zur Höhe hat.

§. 254. Zus. Bei einer Pyramide, worin nicht alle Seitenflächen gleiche Höhe haben, rechnet man jede Seitenfläche für sich aus, und bringt Alles in eine Summe.

§. 255. Dasjenige Stück einer Pyramide, eines Kegels, welches von der Grundfläche und einem ihr parallelen Schnitt begrenzt wird, heißt eine abgekürzte Pyramide, ein abgekürzter Kegel.

§. 256. Lehrs. Die Oberfläche einer abgekürzten senkrechten Pyramide ist, mit Ausschluß der Grundflächen, gleich dem Produkte aus der senkrechten Seite in die halbe Summe der Umfänge beider Grundflächen.

Bew. Eine solche Oberfläche besteht aus so vielen Paralleltrapezen, als jede Grundfläche Seiten hat. Bezeichnen wir die senkrechte Seite mit h, den kleinern Umfang mit u und den größern mit U, so ist die Oberfläche $= h \cdot \frac{1}{2}(u + U)$.

§. 257. Zus. Des abgekürzten senkrechten Kegels Oberfläche ist gleich dem Produkte aus seiner senkrechten Seite in die halbe Summe der Umkreise beider Grundflächen oder in den Umkreis desjenigen Durchschnitts, welcher in gleicher Entfernung von beiden Grundflächen gemacht wird.

§. 258. Lehrs. Eine jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, welches gleiche Grundfläche und Höhe mit jener hat.

Bew. 1) Man nehme zuerst das dreieckige Prisma DFEABC (Fig. 77.) und schneide es durch EAC in gerader Richtung, so wird eine dreieckige Pyramide EABC abgeschnitten, welche mit dem Prisma einerlei Höhe und Grundfläche hat.

2) Das andere Stück des Prisma ist eine viereckige

Pyramide, welche ihre Spitze in E hat und zur Grundfläche das Parallelogramm ACFD (Fig. 78.).

3) Diese viereckige Pyramide schneide man durch die Punkte EDC in gerader Richtung, so entstehen die zwei Pyramiden EACD und EFCD (Fig. 78.), welche gleichen Inhalt haben.

4) Nun kann die eine Pyramide EFCD auch so betrachtet werden, als habe sie ihre Spitze in C und zur Grundfläche das Dreieck DEF = ABC (Fig. 77.). Ihre Höhe ist nun der Höhe des Prisma und daher auch der Höhe der zuerst abgeschnittenen Pyramide EABC gleich.

5) Demnach ist Pyr. EABC = Pyr. CDEF = Pyr. EACD. Folglich eine jede der dritte Theil des dreiseitigen Prisma DFEABC.

6) Nun hat aber mit dem dreiseitigen Prisma jedes andere von gleicher Grundfläche und Höhe, und mit der dreiseitigen Pyramide jede andere von gleicher Grundfläche und Höhe einerlei Inhalt; folglich ist der Satz allgemein.

§. 259. Zus. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.

§. 260. Zus. Alles, was von dem Verhältnisse der Prismen und Cylinder gelehrt worden ist, gilt daher auch von den Pyramiden und Kegeln, nämlich

1) Pyramiden oder Kegel von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.
2) Pyramiden oder Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.
3) Aehnliche Pyramiden oder Kegel verhalten sich wie die Würfel gleichliegender Seiten und auch wie die Würfel ihrer Höhen.

§. 261. Aufg. Den Kubikinhalt einer Pyramide oder eines Kegels zu finden.

Aufl. Wenn man die Grundfläche durch g und die

Höhe durch h ausdrückt, so ist offenbar der verlangte Inhalt $k = \frac{1}{3} g . h$.

Bezeichnet insbesondere d den Durchmesser der Grundfläche des Kegels, h seine Höhe, so ist des Kegels Inhalt $k = \frac{1}{12} \pi . d^2 . h$. Hieraus ist $h = \frac{k}{d^2} . 3{,}819 \ldots$ und $d = 1{,}954 . \sqrt{\frac{k}{h}}$.

§. 262. Aufg. Den Inhalt einer abgekürzten Pyramide zu finden.

Aufl. Wenn die Grundfläche ABC (Fig. 79.) durch G, die andere abc durch g, der ganzen Pyramide Höhe DE durch x, und der wegzudenkenden Höhe De durch y bezeichnet wird, so ist der abgekürzten Pyramide Inhalt $P = \frac{1}{3} G . x - \frac{1}{3} g . y$. Es sei nun ihre Höhe $eE = h$; ferner setze man $ca = m$; $CA = n$ und ziehe $cF \parallel aA$, so verhält sich

$$CF : FA = Cc : cD = Ee : eD = h : y$$

oder $n - m : m = h : y$

woraus $y = \frac{h . m}{n-m}$; demnach $x = h + \frac{h . m}{n-m} = \frac{h . n}{n-m}$.

Folglich $P = \frac{1}{3} h . \frac{G . n - g . m}{n - m}$. Nun ist $n^2 : m^2 = G : g$ und $g = \frac{G . m^2}{n^2}$; folglich

$$P = \frac{1}{2} h . G . \frac{n^2 + n . m + m^2}{n^2} = \frac{1}{3} h\, G . \left(1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}\right)$$

§. 263. Aufg. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden.

Aufl. Man bezeichne die größere Grundfläche AB (Fig. 80.) durch G; die kleinere ab durch g; die ganze Höhe CD durch x; die Theilhöhe Cd durch y; endlich des abgekürzten Kegels Höhe dD durch $h = x - y$ und ziehe

aE || dD, so ist, wenn der Durchmesser AB = D und der Durchmesser ab = d gesetzt wird,

$$D : d = x : y$$

$$D - d : d = x - y : x = h : y$$

woraus $y = \frac{d \cdot h}{D - d}$.

Eben so $D - d : D = x - y : x = h : x$

woraus $x = \frac{D \cdot h}{D - d}$.

Nun ist $G = \frac{1}{4}\pi . D^2$ und $g = \frac{1}{4}\pi . d^2$; folglich des abgekürzten Kegels Inhalt $= \frac{1}{12}\pi . h . \frac{D^3 - d^3}{D - d} =$

$\frac{1}{12}\pi . h . (D^2 + Dd + d^2) = \frac{1}{12}\pi . h [(D + d)^2 - Dd]$.

§. 264. Dieser wahre Inhalt ist etwas größer als ein Cylinder, dessen Durchmesser das Mittel zwischen dem untern und obern Durchmesser des abgekürzten Kegels ist, und etwas kleiner als ein Cylinder, dessen Grundfläche das Mittel zwischen der untern und obern Grundfläche des abgekürzten Kegels ist.

§. 265. Derjenige Körper, welcher von einer krummen Oberfläche so begrenzt wird, daß alle Punkte derselben von einem Punkte innerhalb des Körpers, Mittelpunkt genannt, gleichweit abstehen, heißt eine Kugel. Sie entsteht, wenn sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser dreht, bis er wieder in seine erste Lage kommt. Die krumme Oberfläche, welche vom Umfange des Halbkreises beschrieben wird, heißt die Kugelfläche; der Mittelpunkt des Halbkreises ist zugleich der Mittelpunkt der Kugel. Jede gerade Linie, welche von einem Punkte der Kugelfläche durch den Mittelpunkt bis zu einem andern Punkte derselben gehet, ist ein Durchmesser und die Hälfte ein Halbmesser der Kugel. Jenen Durchmesser insbesondere,

um welchen die Kugel sich drehend gedacht wird, nennt man ihre Achse und deren beide Endpunkte die Pole. Dasjenige Stück der Kugelfläche, welches zwischen zwei parallelen Kreisen liegt, heißt eine Zone.

§. 266. Alle Halbmesser einer Kugel sind gleichgroß, und ebenso alle Durchmesser.

§. 267. Lehrs. Wenn eine Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, so ist der Kugel Schnitt allemal ein Kreis.

Bew. Aus der Kugel Mittelpunkt C (Fig. 81.) fälle man auf die durchschneidende Ebene EABF das Perpendikel CD; ziehe die Halbmesser CA und CB, und die Linien AD und BD, so ist $AD^2 = AC^2 - CD^2$ und $BD^2 = BC^2 - CD^2$. Da aber AC = BC, so ist $AD^2 = BD^2$ und AD = BD. Folglich liegen alle Punkte des Umfangs der schneidenden Ebene in dem Umfange eines Kreises.

§. 268. Zus. Wenn CD = 0 wird, so wird offenbar AD und BD am größten d. h. wenn der Schnitt durch den Mittelpunkt geht, so entsteht der größte Kreis. Je größer aber CD wird, desto kleiner wird AD d. h. je entfernter vom Mittelpunkte die Schnitte gemacht werden, desto kleiner werden die Kreise.

§. 269. Zus. Ein Perpendikel von der Kugel Mittelpunkt auf den Kugelschnitt geht durch den Mittelpunkt desselben. Und ein Perpendikel, das durch den Mittelpunkt des Kugelschnitts gezogen ist, geht durch der Kugel Mittelpunkt.

§. 270. Zus. Eine gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Kugel und des Schnittes verbindet, steht auf diesem senkrecht.

§. 271. Zus. Alle größten Kreise einer Kugel halbiren einander; denn sie haben alle einen gemeinschaftlichen

Mittelpunkt mit der Kugel. Und Kreise, die einander halbiren, sind allemal größte Kreise.

§. 272. Zus. Ein Kreis PMAQ, der durch die Pole des Kreises EF geht, steht auf diesem Kreise senkrecht und ist ein größter Kreis. Wenn ein größter Kreis auf einem andern größten oder kleinern Kreise senkrecht steht, so geht er durch die Pole dieses andern. Wenn daher zwei größte Kreise auf einander senkrecht stehen, so geht jeder durch des andern Pole.

§. 273. Lehrs. Wenn die Achse senkrecht durch einen Schnitt geht, so sind die Pole von allen Punkten im Umfange des Schnitts gleichweit entfernt.

Bew. Man ziehe die geraden Linien PA und PB (Fig. 81.), so ist $PA = \sqrt{(PD^2 + AD^2)}$; aber eben so auch $PB = \sqrt{(PD^2 + AD^2)}$; daher $PA = PB$. Diese Gleichheit wird gerade so von allen Linien nachgewiesen, welche von Q nach dem Umfange EABF gezogen werden.

§. 274. Zus. Wenn die Pole von allen Punkten im Umfange eines Schnitts gleichweit entfernt sind, so geht die Achse senkrecht durch den Mittelpunkt des Schnitts und der Kugel.

§. 275. Zus. Parallelkreise haben einerlei Pole. Denn die Pole des Kreises IK liegen in einer Linie, welche auf seiner Ebene aus dem Mittelpunkte der Kugel senkrecht steht. Aber eben diese Linie ist auch auf der mit IK parallelen Ebene GH oder EF senkrecht, und geht daher auch durch die Pole dieser Kreise.

§. 276. Zus. Die Bogen PA, PB der auf EF senkrechten Kreise sind gleich, weil ihre Sehnen PA, PB gleich sind.

§. 277. Zus. Die Bogen PM, PN größter Kreise, welche zwischen einem größten Kreise GH und dessen Pole P liegen, sind Quadranten.

§. 278. Aufg. Den Inhalt der gewölbten Fläche von jedem Kugelabschnitt und von der ganzen Kugel zu finden.

Aufl. 1) Man nehme zuerst eine Zone, deren Parallelkreise eine unendlich kleine Entfernung $fg = x$ (Fig. 82.) von einander haben, so gilt das Bogenstück de für gerade und die Zone gleicht der Oberfläche eines abgekürzten Kegels und ist $= de \cdot \pi \cdot 2 \cdot mn$.

2) Man denke sich mp und dq senkrecht auf eg, so sind die Dreiecke mpe und mnc einander ähnlich; daher $me : mp = mc : mn$; aber auch $me : mp = de : dq = de : x$. Folglich $de : x = mc : mn$ und $mn = \frac{mc \cdot x}{de} = \frac{r \cdot x}{de}$; wo r den Halbmesser der Kugel bezeichnet. Demnach die Zone $= \pi \cdot 2r \cdot x$.

3) Jede solche Zone ist daher gleich dem Produkte aus seiner Höhe x in den Umfang des größten Kreises der Kugel. Da nun die Oberfläche jedes Kugelstücks und der ganzen Kugel aus solchen schmalen Zonen zusammen gesetzt ist, so ist die Oberfläche des Kugelstücks von der Höhe $af = \pi \cdot 2r \cdot af$.

4) Demnach ist der ganzen Kugelfläche Inhalt $= \pi \cdot 2r \cdot ab = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \pi \cdot d^2$ oder viermal so groß als die Fläche des größten Kreises der Kugel.

§. 279. Zus. Die Kugelfläche ist gleich der krummen Oberfläche des um die Kugel beschriebenen Cylinders; aber nur $\frac{2}{3}$mal so groß als die ganze Oberfläche eben dieses Cylinders.

§. 280. Zus. Einer andern Kugel Halbmesser sei R und Durchmesser D, so ist ihre Oberfläche $4\pi \cdot R^2 = \pi \cdot D^2$. Demnach verhalten sich die Oberflächen verschiedener Kugeln wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

§. 281. Aufg. Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden.

Aufl. Das Quadrat ABCD (Fig. 83.), der Quadrant ABmD und das Dreieck ACD drehen sich um AD; so entstehen ein Cylinder, eine Halbkugel und ein Kegel, sämmtlich von gleicher Höhe. Nun sei EK || AB || DC gezogen, so ist $EF^2 = AF^2 - AE^2$. Aber AF = EK und weil AE : EG = AD : DC und AD = DC ist, so ist auch AE = EG; demnach auch $EF^2 = EK^2 - EG^2$ und $\pi . EF^2 = \pi . EK^2 - \pi . EG^2$ d. h. jeder Querschnitt der Kugel ist so groß als der Unterschied der beiden in gleicher Höhe genommenen Querschnitte des Cylinders und des Kegels. Die Summe der Flächen der Halbkugel aber ist so groß als der Unterschied zwischen der Summe aller Flächen des Cylinders und der Summe aller Flächen des Kegels, oder wenn r den Halbmesser und d den Durchmesser der Kugel bezeichnet, so ist der Halbkugel Inhalt $= \pi . r^2 . r - \frac{1}{3} \pi r^2 . r = \frac{2}{3} \pi r^3$. Folglich ist der ganzen Kugel Inhalt $k = \frac{4}{3} \pi . r^3 = \frac{1}{6} \pi . d^3$.

§. 282. Zus. Eine andere Kugel, deren Halbmesser R und Durchmesser D ist, hat zum Inhalte $\frac{4}{3} \pi . R^3 = \frac{1}{6} \pi . D^3$. Die körperlichen Räume zweier Kugeln verhalten sich also wie die Würfel ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

---

§. 283. Zus. Aus $\frac{1}{6} \pi . d^3 = k$ folgt $d = 1{,}2407 . \sqrt[3]{k}$.

§. 284. Zus. Wenn einer andern Kugel K Durchmesser D ist, so ist $D = 1{,}2407 . \sqrt[3]{K}$. Die Durchmesser zweier Kugeln verhalten sich daher wie die Kubikwurzeln aus ihrem Inhalte.

§. 285. Aufg. Den körperlichen Inhalt eines Kugelabschnitts zu finden.

Aufl. Aus den Untersuchungen über den Inhalt der Kugel geht hervor, daß des Kugelabschnitts Inhalt so groß ist als der Unterschied zwischen einem Cylinder und abgekürzten Kegel von gleicher Höhe und gleichem Durchmesser der Kugel. Wenn nun die Höhe des Abschnittes $DE = h$ ist, so ist allemal des abgekürzten Kegels Halbmesser der kleinern Grundfläche $EG = EA = r - h = \frac{1}{2} d - h$ und der Durchmesser $d - 2h$. Demnach des Kugelabschnitts Inhalt $a = \frac{1}{4} \pi . h . d^2 - \frac{1}{12} \pi . h . [d^2 + d(d-2h) + (d-2h)^2] = \pi . h^2 (\frac{1}{2} d - \frac{1}{3} h)$.

§. 286. Zus. Aus $a = \pi . h^2 (\frac{1}{2} d - \frac{1}{3} h)$ folgt $h^3 - \frac{3}{2} d . h^2 + \frac{3a}{\pi} = 0$.

§. 287. Lehrs. Kegel, Kugel und Cylinder, deren Durchmesser den Höhen gleich ist, verhalten sich wie Eins, Zwei, Drei.

Bew. Es ist der Kubikinhalt eines solchen Kegels $\frac{1}{12} \pi . d^3$, Kugel $\frac{1}{6} \pi d^3$, Cylinders $\frac{1}{4} \pi d^3$. Folglich verhalten sich Kegel, Kugel und Cylinder dieser Art wie $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, oder wie 1, 2, 3.

Ebene Trigonometrie.

§. 1. Die ebene Trigonometrie lehrt, aus drei gegebenen Stücken eines ebenen Dreiecks die übrigen Stücke zu bestimmen und zu berechnen. Unter den gegebenen Stücken muß aber wenigstens Eine Seite sein, weil aus drei Winkeln allein niemals ein ebenes Dreieck bestimmt werden kann.

§. 2. Um die Winkel und Seiten eines Dreiecks vergleichen und ihr Verhältniß zu einander bestimmen zu können, hat man gewisse Linien zu Hilfe genommen, welche trigonometrische Linien heißen. Nämlich aus dem Scheitel irgend eines spitzen Winkels acb (Fig. 1.) beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser ac einen Kreis, und fälle von dem Punkte m, wo der Kreis den einen Schenkel schneidet, auf den andern Schenkel ein Perpendikel mn, so heißt dieses der Sinus des Winkels acb oder seines Bogens am; das abgeschnittene Stück cn des Schenkels ca der Kosinus und das übrige Stück bis zur Peripherie, na, der Quersinus (Sinus versus); das Perpendikel ab vom Ende des Halbmessers, das durch den andern Schenkel in b geschnitten wird, die Tangente, und eben dieser schneidende Schenkel cb die Sekante.

Der andere Winkel bcd hat natürlich die nämlichen Linien, als mf = Sin.; cf = Cos.; fd = Sin. vers.; de = Tang. und ce = Sec. Aber in Rücksicht dessen, daß der Winkel bcd den Winkel acb zu 90° ergänzt und davon Ergänzung oder Komplement des Winkels

acb heißt, führen die nämlichen Linien den umgekehrten Namen, nämlich für den Winkel acb ist mf = nc der Kosinus; cf = nm der Sinus; de die Kotangente und ce die Kosekante.

§. 3. Wenn daher x irgend einen Winkel in einem Quadranten bedeutet, so ist allgemein

Sin x = Cos (90° — x) und Cos x = Sin (90° — x)

Tang x = Cotang (90° — x) und Cotg x = Tg (90° — x)

Sec x = Cosec (90° — x) und Cosec x = Sec (90° — x).

§. 4. Weil von dem Endpunkte m des Halbmessers cm auf den Halbmesser ck nicht anders ein Perpendikel gefällt werden kann als auf den rückwärts nach a verlängerten Halbmesser, so ist mn nicht nur für den Winkel acb, sondern auch für den Winkel bck der Sinus d. h. zwei Nebenwinkel haben einerlei Sinus oder der Sinus eines Winkels ist gleich dem Sinus desjenigen Winkels, der ihn zu 180° ergänzt. Dieß gilt auch von den andern trigonometrischen Linien, mit Ausnahme des Quersinus. Daher ist allgemein

Sin (90° + x) = Sin (90° — x)

Cos (90° + x) = Cos (90° — x)

Tang (90° + x) = Tang (90° — x) u. s. w.

§. 5. Wenn der spitze Winkel acb größer wird, so wächst zugleich der Sinus, Quersinus, die Tangente und Sekante; hingegen der Kosinus, die Kotangente und Kosekante nehmen ab. Dieß geschieht so lange, bis der Bogen am ein Quadrant oder der Winkel acb ein rechter wird. Alsdann sind der Sinus, Quersinus und die Kosekante dem Halbmesser gleich; aber der Kosinus und die Kotangente verschwinden. Die Tangente wird mit der Sekante parallel.

Wächst der Winkel noch mehr und wird er stumpf, wie acg, so wird der Sinus, wie gq, wieder kleiner. Auch die Tangente ar und die Sekante cr nehmen ab,

und haben überdieß eine der vorigen entgegengesetzte Lage, in welcher sie verneint heißen, wenn sie in der vorigen bejaht hießen. Der Kosinus, die Kotangente und die Kosekante nehmen wieder zu, wobei aber der Kosinus cq und die Kotangente dh verneint werden. Der Quersinus aq wird größer als der Halbmesser.

Nimmt der Winkel so weit zu, daß er zweien rechten gleich wird, so verschwindet sowohl der Sinus als die Tangente; die Sekante aber und der Kosinus werden dem Halbmesser gleich, und der Quersinus gleichet dem Durchmesser. Die Kosekante und Kotangente werden parallel.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch für den dritten und vierten Quadranten anstellen.

§. 6. Der Sinus wird nie größer als der Halbmesser; er gleichet aber demselben, wenn der Winkel ein rechter wird. In diesem Falle heißt er der ganze Sinus oder sinus totus. Setzt man diesen $= 1$, so werden alle übrigen Sinusse ächte Brüche.

§. 7. Wenn der Sinus in gerader Linie verlängert wird, bis er den Kreis wieder schneidet, so entsteht eine Sehne mo, von welcher der Sinus die Hälfte ist d. h. der Sinus eines Bogens oder Winkels ist gleich der halben Sehne des doppelten Bogens oder Winkels.

§. 8. Lehrs. Bei gleichen Winkeln, aber verschiedenen Bogen verhalten sich die trigonometrischen Linien wie die Halbmesser.

Bew. Aus dem Scheitel c (Fig. 2.) des Winkels acb ziehe man mit verschiedenen Halbmessern, wie ca und cf verschiedene Bogen, und zeichne die trigonometrischen Linien, wie ab, de, fg, hi, so ist

1) $hi : de = ci : ce$

2) $ch : cd = ci : ce$

3) $fg : ab = cf : ca$ u. s. w.

§. 9. Zus. Wenn man daher die Größe der trigonometrischen Linien eines Winkels oder Bogens für irgend einen Halbmesser weiß, so kann man sie auch leicht für jeden andern Halbmesser berechnen. Deßhalb hat man auch wirklich dieselbe für einen Quadranten von Minute zu Minute berechnet, dabei den Halbmesser = 10,000000,000 gesetzt und diese Berechnung in Tafeln gebracht, die man gewöhnlich zugleich mit in den Logarithmentafeln findet. In manchen davon ist auch schon Mehres über die Einrichtung und den Gebrauch derselben beigebracht. Es sei daher genug, hier auf den Fall aufmerksam zu machen, wo der Logarithme zu einem Winkel gesucht werden soll, der außer Graden und Minuten auch Sekunden enthält. Da nimmt man an, daß bei sehr kleinen Bögen sich die Unterschiede der Sinusse, Tangenten u. s. w. oder ihrer Logarithmen wie die Unterschiede der Bögen verhalten. Es soll z. B. log sin 36° 52′ 11″ gesucht werden. Die Rechnung sieht also aus:

log sin 36° 53′ = 9,77829 Und nun 60 : 11 = 0,00017 : x
log sin 36° 52′ = 9,77812 woraus x = 0,00003
0,00017

Diese Zahl 0,00003 wird zum Logarithmen des kleinern Winkels addirt; dadurch erhält man log sin 36° 52′ 11″ = 9,77815.

Bei solchen trigonometrischen Linien aber, welche beim Wachsen des Winkels abnehmen, wie bei dem Kosinus, der Kotangente, darf natürlich nicht addirt, sondern es muß subtrahirt werden. Z. B. es soll log cos 17° 22′ 43″ gesucht werden. Hier ist

log cos 17° 22′ = 9,97974 Also 60 : 43 = 0,00004 : x
log cos 17° 23′ = 9,97970 und x = 0,00003
0,00004

Diese Zahl 0,00003 wird von dem Logarithmen des kleinern

Winkels abgezogen; dadurch erhält man log cos 17° 22′ 43″ = 9,97971.

Gerade umgekehrt ist das Verfahren, wenn zu einem Logarithmen, der nicht genau in den Tafeln steht, der zugehörige Winkel gesucht werden soll. Z. B. Zu welchem Winkel gehört log tang = 10,44651?

$$\begin{array}{ll} \log tg\ 70^\circ\ 20' = 10{,}44685 & 10{,}44651 \\ \log tg\ 70^\circ\ 19' = \underline{10{,}44645} & \underline{10{,}44645} \\ \qquad 0{,}00040 : & 0{,}00006 = 60 : x \end{array}$$

woraus x = 9″. Es gehört also log tg = 10,44651 zum Winkel 70° 19′ 9″.

§. 10. Aufg. Das Verhalten der trigonometrischen Linien gegen einander zu bestimmen.

Aufl. Bekanntlich ist (Fig. 1.) $cm^2 = mn^2 + cn^2$ oder wenn man den Halbmesser cm = r setzt, so ist $r^2 = \sin^2 + \cos^2$ und für r = 1 wird $1 = \sin^2 + \cos^2$. Daraus folgt

1) $\sin = \sqrt{(r^2 - \cos^2)}$

2) $\cos = \sqrt{(r^2 - \sin^2)}$.

Weil cn : nm = ca : ab, so ist ab oder

3) $\tan = \frac{r \cdot \sin}{\cos}$.

Die Dreiecke cab und cde sind ähnlich und daher de : dc = ca : ab; woraus ab oder

4) $\tan = \frac{r^2}{\text{cotang}}$.

Es ist cf : fm = cd : de; woraus de oder

5) $\text{cotang} = \frac{r \cdot \cos}{\sin}$.

Ferner ist ab : ac = cd : de und hieraus de oder

6) $\text{cotang} = \frac{r^2}{\tan}$.

Weil cn : ca = cm : cb, so ist cb oder

7) $\sec = \frac{r}{\cosin}$.

Auch fällt sogleich in die Augen, daß

8) $\sec = \sqrt{(r^2 + \tan^2)}$

9) $\mathrm{cosec} = \sqrt{(r^2 + \mathrm{cotang}^2)}$

und weil cf : cd = cm : ce, so ist ce oder

10) $\mathrm{cosec} = \frac{r^2}{\sin}$.

Endlich ist

11) $\mathrm{sinvers} = r - \cosin$

12) $\mathrm{cosinv} = r - \sin$.

§. 11. Aufg. Aus den Sinussen und Kosinussen zweier Winkel die Sinusse und Kosinusse sowohl der Summe als der Differenz der beiden Winkel zu bestimmen.

Aufl. Den Winkel vcw (Fig. 3.) wollen wir mit A und wcx mit B bezeichnen; ab, de und af, so wie bm und bn seien senkrecht: so sind die Dreiecke cde, cgf, gab und ban ähnlich; demnach cd : de = cb : bm = cb : nf; woraus $nf = \frac{de \times cb}{cd} = \frac{\sin A \,.\, \cos B}{r}$. Eben so cd : ce = ab : an und hieraus $an = \frac{ce \times ab}{cd} = \frac{\cos A \,.\, \sin B}{r}$.

Aber nf + an = sin (A + B). Wenn wir nun hier immer r = 1 setzen, so ist

I. $\sin(A + B) = \sin A \,.\, \cos B + \cos A \,.\, \sin B$.

Bekanntlich ist sin A = sin dcz; sin (A + B) = sin acz = sin (dcz — B) und cos A = — cos dcz. Durch Substitution dieser Ausdrücke verwandelt sich die Formel I. in folgende:

$\sin(dcz - B) = \sin dcz \,.\, \cos B - \cos dcz \,.\, \cos B$

und wenn man statt des unbestimmten Winkels dcz allgemein A setzt,

II. $\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$.

Es verhält sich $cd : ce = cb : cm$; woraus $cm = \frac{ce \times cb}{cd} = \cos A \cdot \cos B$. Eben so ist $cd : de = ab : bn$; daher bn oder $mf = \frac{de \times ab}{cd} = \sin A \cdot \sin B$. Nun ist $cm - mf = cf = \cos(A+B)$; folglich

III. $\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$.

Nun ist $\cos A = -\cos dcz$; $\sin A = \sin dcz$ und $\cos(A+B) = -\cos acz = -\cos(dcz - B)$; demnach $\cos(dcz - B) = \cos dcz \cdot \cos B + \sin dcz \cdot \sin B$ oder wenn man statt des unbestimmten Winkels dcz allgemein A setzt, so ist

IV. $\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$.

§. 12. Zus. Wenn man in den Formeln I. und III. $B = A$ setzt, so findet man

V. $\sin 2A = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A$

VI. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

Und weil $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ ist, so hat man auch

VII. $\cos 2A = 1 - 2 \cdot \sin^2 A$

und weil $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ ist, so ist aus VI. auch

VIII. $\cos 2A = 2 \cdot \cos^2 A - 1$.

Aus diesen zwei Formeln entstehen folgende zwei:

IX. $\sin A = \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}}$

X. $\cos A = \sqrt{\frac{1 + \cos 2A}{2}}$

Wenn man I. und II. addirt, so kommt

XI. $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \cdot \sin A \cdot \cos B$

und wenn man sie subtrahirt

XII. $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cdot \cos A \cdot \sin B$

und wenn man III. und IV. addirt und subtrahirt

XIII. $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cdot \cos A \cdot \cos B$

XIV. $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2 \cdot \sin A \cdot \sin B$.

Man setze $a = A + B$ und $b = A - B$, so wird $A = \frac{1}{2}(a+b)$ und $B = \frac{1}{2}(a-b)$. Setzt man diese Werthe in den Formeln XI. bis XIV.; dann erhält man

XV. $\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a-b)$

XVI. $\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2}(a-b)$

XVII. $\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(a+b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a-b)$

XVIII. $\cos b - \cos a = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2}(a-b)$.

§. 13. Zus. Aus §. 12. VII. erhält man $1 - \cos 2A = 2 \cdot \sin^2 A$ und wenn man $2A = a$ setzt, $1 - \cos a = 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} a$ oder $\text{sinv.}\, a = 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} a$ und wegen $\sec = \frac{1}{\cos}$ wird man aus X erhalten $\sec A = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos 2A}}$.

§. 14. Zus. Es ist $\text{tang}(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B}$. Nun dividire man Zähler und Nenner durch $\cos A \cdot \cos B$, so erhält man

XIX $\text{tg}(A+B) = \frac{\text{tg} A + \text{tg} B}{1 - \text{tg} A \cdot \text{tg} B}$.

Eben so findet man

XX. $\text{tg}(A-B) = \frac{\text{tg} A - \text{tg} B}{1 + \text{tg} A \cdot \text{tg} B}$.

Setzt man $B = A$, so wird aus XIX.

XXI. $\text{tg}\, 2A = \frac{2\, \text{tg} A}{1 - \text{tg}^2 A}$

und wegen $\text{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ wird aus IX. und X.

XXII. $\mathrm{tg}\, A = \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}}$

XXIII. $\mathrm{tg}\, A = \frac{1 - \cos 2A}{\sqrt{(1 - \cos^2 2A)}} = \frac{1 - \cos 2A}{\sin 2A}$

und durch VII. verwandelt sich dieß in

XXIV. $\mathrm{tg}\, A = \frac{2 \,.\, \sin^2 A}{\sin 2A}$.

§. 15. Zus. Weil $\mathrm{cotang} = \frac{1}{\mathrm{tang}}$ ist, so ergibt sich ganz leicht aus XIX. und XX.

XXV. $\mathrm{cotang}\, (A + B) = \frac{1 - \mathrm{tg}\, A \,.\, \mathrm{tg}\, B}{\mathrm{tg}\, A + \mathrm{tg}\, B}$.

XXVI. $\mathrm{cotg}\, (A - B) = \frac{1 + \mathrm{tg}\, A \,.\, \mathrm{tg}\, B}{\mathrm{tg}\, A - \mathrm{tg}\, B}$

und für $B = A$ wird

XXVII. $\mathrm{cotg}\, 2A = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 A}{2\, \mathrm{tg}\, A} = \frac{\mathrm{cotg}\, A - \mathrm{tg}\, A}{2}$

Wegen $\mathrm{cotg} = \frac{1}{\mathrm{tang}}$ geht aus XXII. hervor

XXVIII. $\mathrm{cotg}\, A = \sqrt{\frac{1 + \cos 2A}{1 - \cos 2A}}$

XXIX. $\mathrm{cotg}\, A = \frac{1 + \cos 2A}{\sqrt{(1 - \cos^2 2A)}} = \frac{1 + \cos 2A}{\sin 2A}$

woraus folgt

XXX. $\sin 2A = \frac{1 + \cos 2A}{\mathrm{cotg}\, A}$.

§. 16. Lehrs. In jedem Dreiecke verhalten sich jede zwei Seiten wie die Sinusse der Gegenwinkel.

Bew. Durch die drei Spitzen eines Dreiecks läßt sich immer eine Kreislinie gezogen denken. Die drei Seiten des Dreiecks stellen dann drei Sehnen dieser Kreislinie vor; und die Hälfte jeder Sehne ist dem Sinus des gegenüber

stehenden oder Gegenwinkels gleich. Die halben Seiten verhalten sich also zu einander wie die Sinusse der Gegenwinkel; folglich verhalten sich auch die ganzen Seiten wie die Sinusse der Gegenwinkel. Bezeichnen wir also die Winkel durch A, B, C (Fig. 4.) und durch a, b, c die Gegenseiten, so ist $a : b = \sin A : \sin B$; $a : c = \sin A : \sin C$; $b : c = \sin B : \sin C$.

§. 17. Zus. Daher ist $a \,.\, \sin B = b \,.\, \sin A$; $a \,.\, \sin C = c \,.\, \sin A$; $b \,.\, \sin C = c \,.\, \sin B$. Ferner $a = \frac{b \,.\, \sin A}{\sin B}$; $b = \frac{c \,.\, \sin B}{\sin C}$; $c = \frac{b \,.\, \sin C}{\sin B}$; $b = \frac{a \,.\, \sin B}{\sin A}$; $c = \frac{a \,.\, \sin C}{\sin A}$ u. s. w. Endlich $\sin A = \frac{a \,.\, \sin B}{b} = \frac{a \,.\, \sin C}{c}$ u. s. w.

§. 18. Zus. Im rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 5.) ist W. $A = 90°$ und $B + C = 90°$; also $\sin A = \sin tot = 1$. Für diesen Fall wird $b = a \,.\, \sin B$; $c = a \,.\, \sin C$ u. s. w.

§. 19. Zus. Es sei $b > c$ und daher $B > C$ für jedwedes Dreieck, so ist $b + c = \frac{b(\sin B + \sin C)}{\sin B}$ und $b - c = \frac{b(\sin B - \sin C)}{\sin B}$; demnach aus §. 12. XV. und XVI. $b + c : b - c = \sin \frac{1}{2}(B + C) \,.\, \cos \frac{1}{2}(B - C) : \cos \frac{1}{2}(B + C) \,.\, \sin \frac{1}{2}(B - C)$ oder wenn man die zwei letztern Glieder durch $\cos \frac{1}{2}(B + C) \,.\, \cos \frac{1}{2}(B - C)$ dividirt, so kommt

$$b + c : b - c = \tang \tfrac{1}{2}(B + C) : \tang \tfrac{1}{2}(B - C).$$

§. 20. Aufg. Die Verbindung und gegenseitige Abhängigkeit der drei Seiten und eines Winkels in jedem Dreiecke auszumitteln.

Aufl. Man fälle von C auf AB (Fig. 4.) eine

senkrechte Linie CD und setze den Halbmesser = 1, so ist CD = b . sin A und AD = b . cos A. Folglich DB = c — b . cos A. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke CDB bekanntlich $a^2 = b^2 . \sin^2 A + (c - b . \cos A)^2 = b^2 . (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2\,bc . \cos A$. Aber $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. Demnach

I. $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc . \cos A$

und II. $a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2\,bc . \cos A)}$

wobei nur zu bemerken ist, daß, wenn der Winkel A stumpf ist, das Glied — 2 bc . cos A bejaht wird. Aus der Formel I. aber geht hervor

III. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a}{2\,bc}$.

Es ist ferner $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$ aus §. 12. IX.

Und da $1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,bc} = \frac{(a+b-c).(a+c-b)}{2\,bc}$ ist, so wird

IV. $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a + b - c).(a + c - b)}{4\,bc}}$.

§. 21. Zus. Für r = 1 ist (Fig. 4.) DB : CD = 1 : tang B; also $\tang B = \frac{CD}{DB} = \frac{b . \sin A}{c - b . \cos A}$ und $\cot B = \frac{1}{\tang B} = \frac{c - b . \cos A}{b . \sin A} = \frac{c}{b . \sin A} - \cot A$.

§. 22. Aufg. Aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel den Inhalt des Dreiecks zu finden.

Aufl. Es ist des Dreiecks ABC (Fig. 4.) Höhe CD = b . sin A = a . sin B. Demnach ist des Dreiecks Inhalt $F = \frac{1}{2} c . b . \sin A = \frac{1}{2} c . a . \sin B$.

§. 23. Aufg. Den Inhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten zu finden.

Aufl. Nach der vorigen Aufgabe ist $F = \frac{1}{2} c . b . \sin A$. Nun ist $\sin A = \sqrt{(1 - \cos^2 A)}$ und $1 - \cos^2 A = (1 + \cos A) . (1 - \cos A) = \left[1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc}\right] . \left[1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc}\right] = \frac{(a+b+c).(b+c-a)}{2 bc} . \frac{(a+c-b).(a+b-c)}{2 bc}$

$= \frac{(a+b+c).(b+c-a).(a+c-b).(a+b-c)}{(2 bc)^2}$. Demnach

$$\sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c).(b+c-a).(a+c-b).(a+b-c)}}{2 bc}.$$

Folglich $F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c).(b+c-a).(a+c-b).(a+b-c)}$. Setzt man $a + b + c = s$, so wird auch

$$F = \sqrt{\left[\frac{s}{2} . \left(\frac{s}{2} - a\right) . \left(\frac{s}{2} - b\right) . \left(\frac{s}{2} - c\right) . \right]}$$

§. 24. Die vorstehenden Formeln sind für r = 1 entwickelt worden. Die in den bekannten Tafeln befindlichen trigonometrischen Linien aber sind nach einem Halbmesser = 10000000000 berechnet worden. Mit dieser Zahl dürfen daher nur unsere Linien multiplicirt oder die Linien der Tafeln dividirt werden, um sie einander gleich zu machen. Bei den allermeisten trigonometrischen Rechnungen bedient man sich aber mit großem Vortheile der Logarithmen. In diesem Falle wird zu unsern Logarithmen 10 addirt oder von den Logarithmen der Tafeln 10 abgezogen, um sie einander anpassend zu machen.

§. 25. Die bisher entwickelten Formeln sind für die ganze Mathematik von höchster Wichtigkeit; insbesondere

dienen sie aber auch zur Auflösung der ebenen Dreiecke; zu welcher Absicht vorzüglich die in den §§. 16 — 23. mitgetheilten Ausdrücke dienen. Die Hauptfälle sollen hier noch in einer Tabelle zusammen gestellt werden.

Gegeben.	Gesucht.
a, b, c	$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c).(a+c-b)}{4\,bc}}$ $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$
b, c, A	$\operatorname{tg} B = \frac{b.\sin A}{c-b.\cos A}$; $\operatorname{tg} C = \frac{c.\sin A}{b-c.\cos A}$ $a = \sqrt{(b^2+c^2-2\,bc.\cos A)}$
a, b, A	$\sin B = \frac{b.\sin A}{a}$; $C = 180 - (A+B)$; $c = \frac{a.\sin C}{\sin A} = \frac{b.\sin C}{\sin B}$
c, A, B	$C = 180 - (A+B)$; $a = \frac{c.\sin A}{\sin C}$
a, A, B	$C = 180 - (A+B)$; $b = \frac{a.\sin B}{\sin A}$; $c = \frac{a.\sin C}{\sin A}$.

Sphärische Trigonometrie.

§. 1. Ein Dreieck, welches durch drei Bogen AB, BD, AD (Fig. 1.) dreier größten Kreise auf der Oberfläche einer Kugel gebildet wird, heißt ein sphärisches Dreieck. Die Bogen AB, BD, AD heißen seine Seiten, und die Winkel, welche diesen Seiten gegenüber stehen und von je zwei solchen Seiten gebildet werden, wie ADB, BAD, ABD, heißen sphärische Winkel. Die Wissenschaft, aus drei gegebenen Stücken eines sphärischen Dreiecks die drei übrigen zu finden, heißt die sphärische Trigonometrie.

§. 2. Die Seiten als Bogen größter Kreise werden nur in Graden und Theilen derselben angegeben, und auf ihre Größe im Längenmaaße, die von dem Halbmesser der Kugel abhängt, wird keine Rücksicht genommen. Uebrigens wird hier nur von solchen sphärischen Dreiecken die Rede sein, in welchen jede Seite kleiner als 180 Grade ist.

§. 3. Lehrs. Jeder sphärische Winkel, den zwei Bogen machen, ist dem Neigungswinkel ihrer Ebenen gleich.

Beweis. Der zwischen den beiden Bogen AD und AE (Fig. 2.) liegende sphärische Winkel A wird durch den geradlinigten Winkel FAG gemessen, dessen Schenkel die Tangenten FA, GA dieser Bogen sind. Jede dieser Tangenten liegt aber in der verlängerten Ebene des Bogens, zu welchem sie gehört, und jede steht auf dem Halbmesser AC senkrecht, welcher die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der von AD und AE begrenzten Ebenen ACD und ACE ist. Demnach ist der Winkel FAG gleich dem Neigungswinkel

der Ebenen ACD und ACE; folglich ist auch der sphärische Winkel A dem Neigungswinkel dieser Ebenen ACD und ACE gleich.

§. 4. Zus. Ein sphärischer Winkel wird daher bestimmt durch den Winkel, den die Tangenten FA und GA bilden, oder durch die Neigung der Ebenen seiner Seiten, oder am gebräuchlichsten und bequemsten durch die Grade des Bogens IL eines größten Kreises, welcher Bogen um 90 Grade von dem Scheitel des zu messenden sphärischen Winkels A absteht. Denn in dem letzten Falle steht CI und CL auf dem nämlichen Punkte C der geraden Linie AB senkrecht, und folglich ist der von ihnen gebildete Winkel ICL das Maaß der Neigung der Flächen AIB und ALB oder des sphärischen Winkels DAE oder IAL, folglich auch der Bogen IL das Maaß des Neigungswinkels jener Flächen.

§. 5. Lehrs. Zwei sphärische Scheitelwinkel sind einander gleich.

Bew. Die Tangenten, welche man auf die Bogen bei dem gemeinschaftlichen Scheitel zieht, bilden Scheitelwinkel, welche bekanntlich einander gleich sind; folglich müssen es auch die sphärischen Scheitelwinkel sein, da diese durch jene bestimmt werden.

§. 6. Lehrs. Zwei sphärische Nebenwinkel machen zusammen 180 Grade aus.

Bew. Die Tangenten, welche man zu den Bogen der beiden sphärischen Nebenwinkel zieht, bilden zwei gerade Nebenwinkel, deren Summe 180 Grade beträgt, folglich auch die Summe der beiden durch sie bestimmten sphärischen Nebenwinkel.

§. 7. Lehrs. Der Bogen eines großen Kreises, der auf der Kugel zwischen zweien Punkten gezogen wird, ist kleiner als jeder andere Bogen eines kleinen Kreises, der zwischen den nämlichen Punkten gezogen werden könnte.

Bew. Wenn die Umfänge verschiedener Kreise durch die nämlichen zwei Punkte gehen, so nähert sich der Bogen, der von beiden Punkten immer abgeschnitten wird, desto mehr der geraden Linie zwischen denselben, je größer der Kreis ist, und darum geben größere Kreise kleinere Bogen. Deßhalb gibt auch auf der Kugel ein großer Kreis zwischen zwei Punkten einen kürzeren Bogen als ein kleiner Kreis.

§. 8. Zus. Weil überall der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten die Entfernung derselben von einander bestimmt: so dient der Bogen eines größten Kreises zum Maaße der Entfernung zweier Punkte auf der Oberfläche der Kugel.

§. 9. Zus. Daher ist in einem sphärischen Dreiecke jede Seite kleiner als die Summe der beiden andern.

§. 10. Lehrs. Die Summe der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks ist immer kleiner als 360 Grade oder kleiner als 4 Q.

Bew. In der zweiten Figur ist

$$DE < DB + EB$$

$$DE + AD + AE < DB + EB + AD + AE$$

oder $DE + AD + AE < AD + DB + AE + EB$

$$< ADIB + AELB$$

d. i. $DE + AD + AE < 180^\circ + 180^\circ < 360^\circ < 4\,Q.$

§. 11. Lehrs. Wenn aus den drei Punkten A, B und C eines sphärischen Dreiecks in einer Entfernung von 90 Graden auf der Kugelfläche die Bogen DE, EF und FD (Fig. 3.) gezogen werden, so entstehet ein neues Dreieck DEF, dessen Seiten die Supplemente zu 2 Q der Gegenwinkel des anfänglichen Dreiecks sind, und dessen Winkel die Supplemente der Gegenseiten des anfänglichen Dreiecks sind.

Bew. I. Nach der Bedingung ist der Bogen EF um 90 Grade vom Punkte B, und der Bogen ED ist eben

so weit vom Punkte A entfernt. Darum ist der, beiden Bogen gemeinschaftliche, Punkt E von den Punkten A und B auch um 90 Grade entfernt, und daher der Pol der Seite AB. Aus dem nämlichen Grunde ist F der Pol von BC, und D der Pol von AC.

Aus dem Pole E werde AB bis nach G, und aus dem Pole D werde AC bis nach H verlängert. Da nun E der Pol des größten Kreises ABG ist, so ist E auch vom Punkte G um 90 Grade entfernt; also ist $EG = 90°$. Aus demselben Grunde ist auch $DH = 90°$. Also ist $GE + DH = 180°$. Es ist aber $GE + DH = GE + DG + GH = DE + GH$; demnach auch $DE + GH = 180°$. Aber GH ist das Maaß des Winkels A (§. 4.); demnach auch $DE +$ W. $A = 180° = 2$ Q. Folglich ist DE die Ergänzung des Winkels A zu 180° oder zu 2 Q. Auf die nämliche Art wird gefunden, daß EF die Ergänzung des Winkels B, und FD die Ergänzung des Winkels C zu 180° oder zu 2 Q ist.

II. Nach der Voraussetzung ist DE von dem Punkte A in der Entfernung von 90° beschrieben; daher ist $AG = 90°$, und aus gleichem Grunde $BL = 90°$; demnach $BL + GA = 180°$. Aber $BL + GA = BL + GB + BA = GL + BA$; demnach auch $GL + BA = 180°$. Nun ist GL das Maaß des Winkels E (§. 4.); also W. $E + BA = 180°$. Folglich ist der Winkel E das Supplement der Gegenseite BA. Auf gleiche Weise wird bewiesen, daß der Winkel D das Supplement der Gegenseite AC, und der Winkel F das Supplement der Gegenseite BC ist.

§. 12. Solche Dreiecke, in denen die Spitzen D, E, F des einen Dreiecks die Pole der Seiten AC, AB, BC des andern Dreiecks, und gegenseitig die Spitzen A, B, C dieses Dreiecks die Pole der Seiten DE, EF, DF jenes

Dreiecks sind, heißen **Polardreiecke**, auch **Supplementendreiecke** oder **Ergänzungsdreiecke**.

§. 13. **Aufg.** Zu einem sphärischen Dreieck sein zugehöriges Polardreieck zu beschreiben.

Aufl. Auf den Schenkeln des Winkels A (Fig. 3.) mache man $AG = AH = 90^\circ$ und lege durch G und H einen größten Kreis DE. Das Nämliche thue man mit den Schenkeln der beiden andern Winkel B und C, so daß $BL = BK = 90^\circ$ und $CM = CN = 90^\circ$ werden, und lege auch durch L und K so wie durch M und N größte Kreise: so geben diese drei größten Kreise in ihrem Durchschnitte das verlangte Polardreieck FDE.

§. 14. **Lehrs.** Die Summe aller drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ABC ist kleiner als 6 Q, aber größer als 2 Q.

Bew. I. Man mache das Polardreieck DEF (Fig. 3.), so ist $A = 2\,Q - DE$; $B = 2\,Q - EF$ und $C = 2\,Q - DF$; also $A + B + C = 6\,Q - (DE + EF + DF)$; folglich $A + B + C < 6\,Q$.

II. Aus §. 11. I. erhellet, daß

$$\begin{array}{r} DE + A = 2\,Q \\ EF + B = 2\,Q \\ FD + C = 2\,Q \\ \hline DE + EF + FD + A + B + C = 6\,Q \end{array}$$

Nach §. 10. aber ist $DE + EF + FD < 4\,Q$; folglich

$A + B + C > 2\,Q$.

§. 15. **Zus.** Ein sphärisches Dreieck kann daher drei rechte, ja selbst drei stumpfe Winkel haben. Darum läßt sich aus zwei bekannten Winkeln eines sphärischen Dreiecks nicht zugleich der dritte finden, wie dieß bei den geradlinigen Dreiecken geschehen kann.

§. 16. **Lehrs.** Zwei sphärische Dreiecke auf derselben Kugeloberfläche oder auf gleichen Kugeln sind einander gleich: 1) wenn die drei Seiten in beiden wechselseitig

gleich sind; 2) wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel wechselseitig gleich sind; 3) wenn eine Seite und beide anliegende Winkel wechselseitig gleich sind, und 4) wenn die drei Winkel in beiden Dreiecken wechselseitig einander gleich sind.

Bew. Die Wahrheit der drei ersten Behauptungen wird ganz so wie bei geradlinigen Dreiecken dargethan, nämlich durch Aufeinanderlegen und Decken derselben. Darum braucht nur noch die vierte Behauptung nachgewiesen zu werden.

In den beiden Dreiecken ABC und abc (Fig. 4.) sei A = a, B = b und C = c; so haben ihre Ergänzungsdreiecke DEF und def gleiche Seiten, nämlich EF = ef, DF = df und DE = de, weil sie die Ergänzungen gleicher Winkel zu 180° sind; darum sind die beiden Dreiecke DEF und def einander gleich (vermöge Nr. 1.) und daher D = d, E = e und F = f. Sind aber diese Winkel gleich, so sind es auch ihre Supplemente, welches hier die Seiten der anfänglich gegebenen Dreiecke ABC und abc sind, d. h. es ist AB = ab, AC = ac und BC = bc.

§. 17. Lehrs. Wenn in einem sphärischen Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so sind die Gegenwinkel auch einander gleich; und wenn zwei Winkel gleich sind, so sind die Gegenseiten gleich.

Bew. I. Auf den gleichen Schenkeln AB und AC schneide man Bogenstücke von willkührlicher, aber gleicher Länge ab, z. B. AD und AE (Fig. 5.) und ziehe als größte Kreisbogen CD und BE, so sind, weil W. A = W. A, AB = AC und AE = AD ist, die Dreiecke ABE und ACD einander gleich (§. 16. Nr. 2.), und daher BE = CD. Es ist aber auch DB = EC und BC = BC; folglich auch Dr. DBC = Dr. ECB (§. 16. Nr. 1.) und W. DBC = W. ECB oder, was das Nämliche ist, W. ABC = W. ACB.

II. In der 4. Figur sei nach der Voraussetzung W. B = W. C. Alsdann ist auch in dem Ergänzungsdreieck DF = DE und W. E = W. F (Nr. I.). Daher müssen auch die Ergänzungen beider Winkel zu 180° gleich sein d. h. AC = AB.

§. 18. Zus. In jedem sphärischen Dreiecke also, welches lauter gleiche Seiten hat, sind alle Winkel einander gleich; und sind die Winkel gleich, so ist das Dreieck gleichseitig.

§. 19. Lehrs. In jedem sphärischen Dreiecke stehet eine größere Seite dem größern Winkel, und ein größerer Winkel der größern Seite gegenüber.

Bew. I. Es sei B > A (Fig. 6.). Nun ziehe man BD als Bogen eines größten Kreises so, daß W. ABD = W. A wird und es muß BD = AD werden (§. 17.). Da aber BD + DC > BC (§. 9.); so ist auch AD + DC > BC d. i. AC > BC.

II. Wäre B = A; so müßte AC = BC sein (nach §. 17.), was gegen die Voraussetzung ist. Wäre aber B < A; so müßte nach Nr. I. auch AC < BC sein, gleichfalls gegen die Voraussetzung. Darum bleibt nur der dritte und letzte Fall übrig, daß B > A ist.

§. 20. Wenn wir die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 7.) durch A, B, C bezeichnen, so sollen die ihnen in derselben Ordnung gegenüber stehenden Seiten durch a, b, c ausgedrückt werden, so daß also BC = a, AC = b und AB = c ist.

Rechtwinklige Dreiecke.

§. 21. Lehrs. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke verhält sich der Halbmesser oder Sinus totus zum Sinus des Gegenwinkels einer Kathete, wie der Sinus der Hypotenuse zum Sinus der Kathete.

Bew. Der Winkel CAB (Fig. 8.) sei der rechte; CD ein Loth von C auf den Halbmesser MB und CE ein Loth aus C auf den Halbmesser MA; so ist $CD = \sin CB$ und $CE = \sin CA$. Weil aber das Dr. CED ein rechtwinkliges sein muß, so verhält sich

$$CD : CE = r : \sin D$$

oder weil die beiden Winkel CDE und B einerlei Neigung haben (§. 3.) und daher gleich sind, so ist auch

$$CD : CE = r : \sin B$$

aber auch $CD : CE = \sin CB : \sin CA$

$$\overline{r : \sin B = \sin CB : \sin CA}$$

oder $r : \sin B = \sin a : \sin b$

§. 22. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zum Sinus einer Kathete, wie die Tangente des anliegenden schiefen Winkels zur Tangente der gegenüber stehenden Kathete. (Fig. 8.)

Bew. Nach §. 3. ist W. D = W. B. Es gilt daher

$$CE : ED = \text{tang}\, B : r$$

$$ME : CE = r : \text{tg}\, CA$$

$$\overline{ME : ED = \text{tg}\, B : \text{tg}\, CA}$$

$$ME : ED = r : \sin AB$$

$$\overline{r : \sin AB = \text{tg}\, B : \text{tg}\, CA}$$

oder $r : \sin c = \text{tg}\, B : \text{tg}\, b$

§. 23. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zum Kosinus der einen Kathete, wie der Kosinus der andern Kathete zum Kosinus der Hypotenuse.

Bew. In dem rechtwinkligen Dreiecke (Fig. 9.), das wiederum seinen rechten Winkel in A hat, verlängere man jede Seite zu einem Quadranten oder zu 90°, und ziehe durch die Endpunkte E und F den Bogen DEF, so sind bei F und E rechte Winkel und D ist der Pol von BAF. Es ist also CE die Ergänzung von BC; AF die Ergänzung von BA und CD die von AC. Ueberdieß ist das Dr. DEC ein rechtwinkliges; demnach ist wie §. 21.

$$r : \sin D = \sin DC : \sin CE$$

Aber $\sin D = \sin AF = \cos AB$; ferner $\sin DC = \cos AC$ und $\sin CE = \cos BC$; demnach auch

$$r : \cos AB = \cos AC : \cos BC = \cos b : \cos a$$

§. 24. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zum Kosinus der einen Kathete, wie der Sinus des anliegenden schiefen Winkels zum Kosinus des Gegenwinkels.

Bew. Man hat wiederum nach §. 21. (Fig. 9.)

$$r : \sin C = \sin DC : \sin DE$$

Aber $\sin DC = \cos AC$ und $\sin DE = \cos EF = \cos B$. Die Scheitelwinkel bei C sind gleich. Demnach auch

$$r : \sin C = \cos AC : \cos B = \cos b : \cos B$$

§. 25. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zum Kosinus eines schiefen Winkels, wie die Kotangente der anliegenden Kathete zur Kotangente der Hypotenuse oder wie die Tangente der Hypotenuse zur Tangente der anliegenden Kathete.

Bew. Nach §. 22. ist $r : \sin DE = \operatorname{tg} D : \operatorname{tg} CE$

oder $r : \cos B = \operatorname{cotg} AB : \operatorname{cotg} BC$

$$= \operatorname{tg} BC : \operatorname{tg} AB = \operatorname{tg} a : \operatorname{tg} c.$$

§. 26. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zum Kosinus der Hypotenuse, wie die Tangente des einen schiefen Winkels zur Kotangente des andern, in welcher Ordnung man sie auch nehmen mag.

Bew. Nach §. 22. ist $r : \sin CE = \operatorname{tg} C : \operatorname{tg} DE$

oder $r : \operatorname{cosin} BC = \operatorname{tg} C : \operatorname{cotg} B = \operatorname{tg} B : \operatorname{cotg} C$

§. 27. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zum Sinus der einen Kathete, wie die Kotangente der andern zur Kotangente des gegenüber stehenden schiefen Winkels.

Bew. Man hat nach §. 22.

$$r : \sin BA = \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} CA$$

Und da $\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} CA = \operatorname{cotg} CA : \operatorname{cotg} B$ ist, so hat man auch

$$r : \sin BA = \operatorname{cotg} CA : \operatorname{cotg} B$$

§. 28. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zum Kosinus des einen schiefen Winkels, wie die Tangente der Hypotenuse zur Tangente der an jenem schiefen Winkel anliegenden Kathete.

Bew. $r : \cos B = \text{cotg } BA : \text{cotg } BC$

Aber $\text{tg } BC : \text{tg } BA = \text{cotg } BA : \text{cotg } BC$

$r : \cos B = \text{tg } BC : \text{tg } BA = \text{tg } a : \text{tg } c$

§. 29. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zum Kosinus der Hypotenuse, wie die Tangente des einen schiefen Winkels zur Kotangente des andern.

Bew. $r : \cos BC = \text{tg } C : \text{cotg } B$

überdieß $\text{tg } B : \text{cotg } C = \text{tg } C : \text{cotg } B$

Demnach auch $r : \cos BC = \text{tg } B : \text{cotg } C$.

§. 30. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zur Kotangente der Hypotenuse, wie die Tangente einer Kathete zum Kosinus des anliegenden schiefen Winkels.

Bew. Nach §. 28. ist $r : \text{tg } BC = \cos B : \text{tg } BA$

oder $r : \frac{r^2}{\text{cotg } BC} = \cos B : \text{tg } BA$

ferner $r \,.\, \text{cotg } BC : r^2 = \cos B : \text{tg } BA$

$\text{cotg } BC : r = \cos B : \text{tg } BA$

oder $r : \text{cotg } BC = \text{tg } BA : \cos B$

§. 31. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zur Kotangente eines schiefen Winkels, wie die Tangente der gegenüber stehenden Kathete zum Sinus der andern Kathete.

Bew. Aus §. 27. ist $r : \sin BA = \text{cotg } CA : \text{cotg } B$

daher auch $r : \sin BA = \frac{r^2}{\text{tg } CA} : \text{cotg } B$

$\text{tg } CA : \sin BA = r : \text{cotg } B$

oder $r : \text{cotg } B = \text{tg } CA : \sin BA$

§. 32. Lehrs. Der Halbmesser verhält sich zur

Kotangente des einen schiefen Winkels, wie die Kotangente des andern zum Kosinus der Hypotenuse.

Bew. Nach §. 29. ist r : cos BC = tg B : cotg C

und daher $r : \cos BC = \frac{r^2}{\text{cotg } B} : \text{cotg } C$

cotg B : cos BC = r : cotg C

oder r : cotg C = cotg B : cos BC.

§. 33. Zus. Die vorstehenden 12 Proportionen (§. 21 — 32.) lassen sich auch bequem als Gleichungen darstellen, und man erhält, wenn r = 1 gesetzt wird, folgende Ausdrücke:

1) sin b = sin a . sin B

2) $\begin{cases} \text{tang } b = \text{tang } B \cdot \sin c \\ \text{tang } c = \text{tang } C \cdot \sin b \end{cases}$

3) cos a = cos c . cos b

4) $\begin{cases} \cos B = \sin C \cdot \cos b \\ \cos C = \sin B \cdot \cos c \end{cases}$

5) cotg a = cos B . cotg c

6) cotg B = cos a . tang C

7) cotg B = sin c . cotg b

8) $\begin{cases} \text{tang } c = \cos B \cdot \text{tang } a \\ \text{tang } b = \cos C \cdot \text{tang } a \end{cases}$

9) cotg C = cos a . tang B

10) $\begin{cases} \cos B = \text{cotg } a \cdot \text{tang } c \\ \cos C = \text{cotang } a \cdot \text{tang } b \end{cases}$

11) sin c = cotg B . tang b

12) cos a = cotg C . cotg B.

§. 34. Durch Hilfe der nunmehr gefundenen 12 Proportionen oder Gleichungen lassen sich alle Aufgaben auflösen, welche bei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken vorkommen können; nämlich aus zwei gegebenen Größen lassen sich die übrigen finden. Die dritte Größe ist durch den rechten Winkel an sich schon gegeben, welches hier der Winkel A = 90° ist.

§. 35. Alle Größen, welche hier gesucht werden, sind trigonometrische Linien. Man weiß aber, daß zu zweien Winkeln, die sich zu 180° ergänzen, gleichgroße trigonometrische Linien gehören (mit Ausnahme des Quersinus). Es wird daher hier ungewiß, ob die gesuchten Winkel größer oder kleiner als 90° d. h. stumpf oder spitzig und ob die Seitenlinien größer oder kleiner als ein Quadrant d. h. stumpf oder spitzig sind. Diese Ungewißheit aber wird gehoben durch frühere Wahrheiten, namentlich durch die Lehre von den Zeichen bei den trigonometrischen Linien, verbunden mit den Regeln der Zeichen bei der Multiplikation und Division, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Zuvor bemerke man nur noch, daß ein Paar Winkel oder Bogen, von welchen jeder weniger als 90° oder jeder mehr als 90° beträgt, gleichartig; dasjenige Paar aber, von welchen der eine mehr, der andere weniger als 90° hält, ungleichartig genannt zu werden pflegt. Es leuchtet nun ein:

1) Ein schiefer Winkel und das ihm gegenüber stehende Perpendikel sind allemal gleichartig. Denn wenn in §. 33. Nr. 2. oder in §. 22. tang B bejaht d. h. W. $B < 90°$ ist, so wird das Produkt $\sin c \,.\, \mathrm{tg}\, B$ bejaht und darum auch tang b bejaht d. h. $b < 90°$. Eben so wird b verneint, oder $b > 90°$, wenn B verneint oder $B > 90°$ wird.

2) Wenn beide Perpendikel gleichartig sind, so ist die Hypotenuse kleiner als 90° oder spitzig; sind sie aber ungleichartig, so ist sie größer als 90° oder stumpf. Dieß ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung aus §. 23. oder aus §. 33. Nr. 3. Umgekehrt, wenn die Hypotenuse spitzig oder stumpf ist, sind die Perpendikel gleichartig oder ungleichartig. Wegen Nr. 1. muß dasselbe auch gelten, wenn die beiden schiefen

Winkel gleichartig oder ungleichartig sind; welches auch aus §. 33. Nr. 12. folgt.

3) Die Hypotenuse ist spitzig oder stumpf, je nachdem ein Winkel mit der anliegenden Seite gleichartig oder ungleichartig ist, wie aus §. 25. oder §. 33. Nr. 5. hervorgeht.

4) Ein Winkel ist spitzig oder stumpf, je nachdem der andere mit der Hypotenuse gleichartig oder ungleichartig ist, wie §. 26. oder §. 33. Nr. 6. lehrt.

5) Wo lauter Sinusse vorkommen, bleibt die Sache zweifelhaft; denn in dem ersten und zweiten Quadranten sind die Sinusse bejaht. Doch sind die Aufgaben, die durch §. 21. oder §. 33. Nr. 1. aufgelöset werden, durch Nr. 1. entschieden und bestimmt.

In den übrigen zweifelhaften Fällen müssen die Umstände der Aufgabe die Beschaffenheit der gesuchten Größe bestimmen.

Schiefwinklige Dreiecke.

§. 36. Ein jedes schiefwinklige Dreieck läßt sich in zwei rechtwinklige verwandeln, wenn man von einem nach Belieben angenommenen Winkel desselben auf die entgegengesetzte Seite oder ihre Verlängerung ein Perpendikel fällt. Daher lassen sich die schiefwinkligen Dreiecke auf rechtwinklige zurückbringen und nach den vorhergehenden Lehrsätzen auflösen, wenn man in jedem rechtwinkligen Dreiecke außer dem rechten Winkel noch zwei Stücke als gegeben erhält. Weil aber das Perpendikel, wodurch das schiefwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige zertheilt wird, sowohl innerhalb als außerhalb des Dreiecks fallen kann, so wollen wir einen Satz voraus schicken, wodurch die Lage dieses Perpendikels näher bestimmt wird.

§. 37. Lehrs. Wenn in einem sphärischen Dreiecke die Winkel an der Grundlinie gleichartig sind, so fällt

das Perpendikel, welches vom Scheitel auf die Grundlinie gezogen wird, allemal innerhalb des Dreiecks. Sind aber jene Winkel ungleichartig, so fällt das Perpendikel außerhalb des Dreiecks.

Bew. Wenn das Perpendikel CD (Fig. 10.) innerhalb des Dreiecks ABC fällt: so muß W. A in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC mit der Gegenseite CD gleichartig sein, und ebenso der W. B. in dem rechtwinkligen Dreiecke BDC mit der Gegenseite CD (§. 35. Nr. 1.). Da nun W. A und W. B mit CD gleichartig sind, so sind sie auch unter sich selbst gleichartig.

Fällt aber das Perpendikel CD (Fig. 11.) außerhalb des Dreiecks, so ist im rechtwinkligen Dreiecke ADC der Winkel A mit dem Perpendikel CD gleichartig, so wie in dem rechtwinkligen Dreiecke BDC der W. CBD mit CD (§. 35. Nr. 1.). Darum sind die Winkel A und CBD auch unter sich gleichartig. Aber die beiden Nebenwinkel ABC und CBD sind unter sich ungleichartig; darum sind es auch die beiden Winkel ABC und A.

§. 38. Lehrs. In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinusse zweier Winkel wie die Sinusse der Gegenseiten.

Bew. Man fälle aus einem Winkel auf die Gegenseite oder ihre Verlängerung ein Perpendikel CD (Fig. 10.), so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke ADC und BDC. In denselben ist

1) $r : \sin A = \sin AC : \sin CD$

2) $r : \sin B = \sin BC : \sin CD$

Aus Nr. 1. wird $r . \sin CD = \sin A . \sin AC$

Aus Nr. 2. aber $r . \sin CD = \sin B . \sin BC$

$$\sin A . \sin AC = \sin B . \sin BC$$

oder $\sin A : \sin B = \sin BC : \sin AC$

Auf die nämliche Art wird der Beweis geführt, wenn das Perpendikel CD (Fig. 11.) außerhalb des Dreiecks

fällt; nur muß man alsdann anstatt sin B den Sinus des Ergänzungswinkels CBD nehmen, welche Sinusse bekanntlich einander gleich sind. Der gefundene Satz läßt sich nun bekanntlich auch also ausdrücken:

$$\text{Sin A} : \text{Sin B} = \text{sin a} : \text{sin b}$$

Eben so wird aber auch gefunden

$$\text{Sin A} : \text{Sin C} = \text{sin a} : \text{sin c}$$

und $\text{sin B} : \text{sin C} = \text{sin b} : \text{sin c}$

Alle Proportionen lassen sich aber auch als Gleichungen darstellen; alsdann hat man auch

I. $\text{sin a} . \text{sin B} = \text{sin A} . \text{sin b}$

II. $\text{sin a} . \text{sin C} = \text{sin A} . \text{sin c}$

III. $\text{sin b} . \text{sin C} = \text{sin B} . \text{sin c}$

§. 39. Lehrs. Wenn ein sphärisches Dreieck durch ein Perpendikel in zwei rechtwinklige Dreiecke getheilet ist, so verhalten sich die Sinusse der Abschnitte umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Winkel, oder gerade wie die Kotangenten dieser Winkel.

Bew. Es ist 1) $r : \text{sin AD} = \text{tang A} : \text{tang CD}$

2) $r : \text{sin BD} = \text{tang B} : \text{tang CD}$

Daraus wird

$r . \text{tang CD} = \text{sin AD} . \text{tang A}$

und $r . \text{tang CD} = \text{sin BD} . \text{tang B}$

$\text{sin AD} . \text{tang A} = \text{sin BD} . \text{tang B}$

und $\text{sin AD} : \text{sin BD} = \text{tang B} : \text{tang A}$

oder $\text{sin AD} : \text{sin BD} = \text{cotg A} : \text{cotg B}$

§. 40. Lehrs. Wenn ein sphärisches Dreieck durch ein Perpendikel in zwei rechtwinklige Dreiecke getheilet wird, so verhalten sich die Kosinusse der Abschnitte wie die Kosinusse der anliegenden Seiten.

Bew. Es ist 1) $r : \text{cos DC} = \text{cos AD} : \text{cos AC}$

2) $r : \text{cos DC} = \text{cos BD} : \text{cos BC}$

Daraus ist $\text{cos AD} : \text{cos AC} = \text{cos BD} : \text{cos BC}$

oder $\text{cos AD} : \text{cos BD} = \text{cos AC} : \text{cos BC}$

§. 41. Lehrs. In einem sphärischen Dreiecke, welches von einem Perpendikel geschnitten wird, verhalten sich die Sinusse der abgeschnittenen Winkel wie die Kosinusse der auf der nämlichen Seite liegenden Winkel.

Bew. Es ist $r : \cos DC = \sin DCA : \cos A$

$$r : \cos DC = \sin DCB : \cos B$$

$$\sin DCA : \cos A = \sin DCB : \cos B$$

oder $\sin DCA : \sin DCB = \cos A : \cos B$

§. 42. Lehrs. In einem sphärischen Dreiecke, das durch ein Perpendikel getheilt wird, verhalten sich die Kosinusse der abgeschnittenen Winkel wie die Kotangenten der anliegenden Seiten oder umgekehrt wie die Tangenten der nämlichen Seiten.

Bew. Es ist 1) $r : \cos ACD = \tan AC : \tan CD$

2) $r : \cos BCD = \tan BC : \tan CD$

Daraus ist $r \cdot \tan CD = \cos ACD \cdot \tan AC$

$$r \cdot \tan CD = \cos BCD \cdot \tan BC$$

$$\cos ACD \cdot \tan AC = \cos BCD \cdot \tan BC$$

und $\cos ACD : \cos BCD = \tan BC : \tan AC$

oder $\cos ACD : \cos BCD = \cot AC : \cot BC$

§. 43. Lehrs. Zwischen dreien Seiten und einem Winkel eines sphärischen Dreieckes findet eine gegenseitige Beziehung und Abhängigkeit Statt.

Bew. Zu den Bögen AB und AC (Fig. 12.) ziehe man ihre Tangenten AF und AE, so wie ihre Sekanten DF und DE, und verbinde die Punkte E und F durch eine gerade Linie EF, so entstehen zwei ebene Dreiecke AEF und DEF. In diesen ist

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2 \cdot AE \times AF \times \cos A$$

und $EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \cdot DE \times DF \times \cos a$

Demnach $AE^2 + AF^2 - 2 \cdot AE \times AF \times \cos A = DE^2$

$$+ DF^2 - 2 \cdot DE \times DF \times \cos a.$$

Es ist aber $AE = tg\, b$; $AF = tg\, c$; $DE = sec\, b$ und $DF = sec\, c$.

Daher wird vorige Gleichung auch also geschrieben:

$$tg\, b^2 + tg\, c^2 - 2 \,.\, tg\, b \,.\, tg\, c \,.\, cos\, A = sec\, b^2 + sec\, c^2 - 2 \,.\, sec\, b \,.\, sec\, c \,.\, cos\, a.$$

Nun ist $sec^2 - tg^2 = 1$, wenn der Halbmesser als Einheit genommen wird. Darnach die Gleichung geordnet, wird sie durch kleine Veränderungen

$$1 + tg\, b \,.\, tg\, c \,.\, cos\, A = sec\, b \,.\, sec\, c \,.\, cos\, a$$

und nun für tg ihren Werth $\frac{sin}{cos}$ und für sec ihren Werth $\frac{1}{cos}$ gesetzt, erhält man nach leichter Veränderung

$$\text{I.} \quad cos\, b \,.\, cos\, c + sin\, b \,.\, sin\, c \,.\, cos\, A = cos\, a$$

woraus

$$\text{II.} \quad cos\, A = \frac{cos\, a - cos\, b \,.\, cos\, c}{sin\, b \,.\, sin\, c}$$

und

$$1 - cos\, A = \frac{sin\, b \,.\, sin\, c + cos\, b \,.\, cos\, c - cos\, a}{sin\, b \,.\, sin\, c}$$

$$= \frac{cos\,(b - c) - cos\, a}{sin\, b \,.\, sin\, c}$$

Durch Anwendung der Formel in der ebenen Trig. §. 12. Nr. XVI. wird

$$\frac{1 - cos\, A}{2} = \frac{sin\, \tfrac{1}{2}(a + b - c) \,.\, sin\, \tfrac{1}{2}(a - b + c)}{sin\, b \,.\, sin\, c}$$

und nach der ebenen Trig. §. 12. Nr. IX.

$$\text{III.} \quad Sin\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{sin\, \tfrac{1}{2}(a + b - c) \,.\, sin\, \tfrac{1}{2}(a - b + c)}{sin\, b \,.\, sin\, c}}.$$

Auf gleiche Weise findet man $sin\, \tfrac{1}{2} B$ und $sin\, \tfrac{1}{2} C$.

§. 44. Lehrs. Zwischen dreien Winkeln und einer Seite eines sphärischen Dreiecks findet eine gegenseitige Beziehung und Abhängigkeit Statt.

Bew. Man verzeichne zum Dreiecke ABC (Fig. 3.) sein Polardreieck DEF, so weiß man, daß A und DE einander zu 180° ergänzen, daß also $\sin DE = \sin A$; aus gleichem Grunde $\sin EF = \sin B$ und $\sin DF = \sin C$ ist. Aus dem nämlichen Grunde ist aber auch $\cos F = -\cos a$; $\cos C = -\cos DF$; $\cos E = -\cos c$; $\cos DE = -\cos A$ und $\cos EF = -\cos B$. In dem Dreiecke DEF ist nun (§. 43. II.)

$$\cos F = \frac{\cos DE - \cos EF \, . \, \cos DF}{\sin EF \, . \, \sin DF}$$

folglich auch

$$-\cos a = \frac{-\cos A - \cos B \, . \cos C}{\sin B \, . \sin C}$$

oder

$$\text{I.} \quad \cos a = \frac{\cos A + \cos B \, . \cos C}{\sin B \, . \sin C}$$

Aus der ebenen Trigonometrie ist aber $1 - \cos a = 2 - 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a$ und daraus $2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = 1 + \cos a$

$$= 1 + \frac{\cos A + \cos B \, . \, \cos C}{\sin B \, . \sin C} =$$

$$\frac{\cos A + \sin B \, . \sin C + \cos B \, . \cos C}{\sin B \, . \sin C} = \frac{\cos A + \cos (B - C)}{\sin B \, . \sin C}$$

$$= \frac{2 \cos \tfrac{1}{2} (A + B - C) \, . \cos \tfrac{1}{2} (A + C - B)}{\sin B \, . \sin C}$$

(Ebene Trig. §. 12. Nr. XV.), und

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (A + B - C) \, . \cos \tfrac{1}{2} (A + C - B)}{\sin B \, . \sin C}$$

woraus

$$\text{II. } \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\,.\,\sin C}}$$

Auf die nämliche Art wird $\cos\frac{1}{2}b$ und $\cos\frac{1}{2}c$ gefunden.

§. 45. Die Zweideutigkeiten, welche hier vorkommen können, werden auf ähnliche Weise, wie bei den rechtwinkligen Dreiecken beseitigt. Die Kürze gebietet aber, die Ausmittelung der einzelnen Fälle dem eigenen Nachdenken und Forschen des Lesers zu überlassen!

Kurze
Anweisung zum Feldmessen.

§. 1. Die Feldmeßkunst lehrt, einzelne Stücke der Erdoberfläche messen, ihre Gestalt und Größe bestimmen, sie theilen und verzeichnen. Ein tüchtiger Feldmesser muß, außer der Fertigkeit im guten Zeichnen, in der reinen Mathematik wohl geübt sein, auch einige Kenntnisse in den optischen und astronomischen, so wie in den physischen Wissenschaften haben.

§. 2. Vor Allem muß der Feldmesser seine Instrumente oder Werkzeuge gut kennen, sicher gebrauchen und leicht behandeln lernen. Hieher gehören zunächst:

Die Meßkette, welche zum Messen der Linien und Entfernungen dient, besteht aus Eisen- oder Messingdraht, ist 5 bis 10 Ruthen lang, und ihre Glieder, von welchen jedes gewöhnlich 1 Fuß groß ist, sind mit Ringen verbunden. Je 5 Fuß oder $\frac{1}{2}$ Ruthe werden durch größere Ringe mit Querstücken bemerklich gemacht.

Die Meßstangen sind gleichfalls zum Messen der Entfernungen bestimmt, werden von gutem, trockenem Tannenholze gemacht, an ihren Enden mit Eisen oder Messing beschlagen und sind 1 Ruthe lang. Man nimmt gerne vier derselben und unterscheidet sie durch verschiedene Farben.

Die Meßschnur ist zum Feldmessen weniger tauglich, weil sie durch die Feuchtigkeit kürzer und durch die Trockenheit wieder länger wird, und daher keine genauen Ergeb-

nisse gibt. Doch ist sie im Gebrauche sehr bequem und wird weniger unsicher, wenn man sie in Leinöl oder in Wachs siedet.

Der Meßtisch dienet nicht blos, um Winkel auf dem Felde aufzunehmen und zu Papier zu bringen, sondern vorzüglich auch, um eine ganze Flur oder Gegend sogleich vom Felde aufs Papier zu tragen und zu verzeichnen. Er ist ein viereckiges, 12 bis 18 Zoll ins Gevierte haltendes Brett von gutem trocknem Holze, auf welches ein Bogen Papier vermittelst eines Rahmen aufgespannt oder mit Mundleim befestigt werden kann, steht auf einem Gestell mit 3 Füssen und kann vermöge besonderer Vorrichtung z. B. einer metallenen Hülse und Nuß so sanft und leicht bewegt werden, daß er jede zum Messen nothwendige Lage und Richtung erhält und fest darin beharrt. Auf den Tisch gehöret noch ein Lineal, an dessen Enden zwei Diopter oder Absehen senkrecht befestigt sind. Anstatt der Diopter kann auch ein Fernrohr auf dem Lineal des Tisches angebracht werden.

Das Astrolabium ist ein Winkelmesser. Es besteht aus einem Halbkreise, der in 180 Grade, auch wohl in halbe und viertel Grade eingetheilt ist. An seinem Durchmesser sind zwei Diopter oder Absehen befestigt und um seinen Mittelpunkt bewegt sich ein Diopterlineal. Es steht auf einem Gestelle und muß so eingerichtet sein, daß es sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Lage gestellt und befestigt werden kann.

Die Boussole ist eine runde Büchse mit einem gläsernen Deckel, in welche eine Magnetnadel von etwa 4 bis 6 Zoll Länge eingeschlossen ist. Die Magnetnadel spielet frei über einem Stifte, auf welchem sie mit einem Hütchen aufliegt, und der Nordpol geht in eine feine Spitze aus, welche auf einem ringsum eingetheilten Kreise ganze und halbe Grade von 0 bis 360 zeiget. Da die Boussole zum

Messen der Winkel gebraucht wird, so ist ein Diopterlineal angebracht, welches mit der Linie durch 0° und 180° des Kreises parallel sein muß.

Ein vorzüglicher Winkelmesser ist auch D. Tobias Mayers Recipiangel, welcher aus zwei messingnen Linealen besteht, die mit Dioptern versehen und um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt so beweglich sind, daß das obere Lineal, welches etwas kürzer als das untere ist, über dieses allein bewegt werden kann. Auf dem obern Lineal, welches die Alhidadenregel oder das Absehelineal abgibt, ist ein geradliniger Transporteur oder Sehnenmaaßstab verzeichnet; an dem untern befindet sich eine Hülse, damit das Werkzeug auf ein Stativ oder Gestelle befestiget werden könne.

Sowohl diese als auch andere, dem Feldmesser nützliche und nothwendige Werkzeuge, für deren Beschreibung hier ohnedieß kein Raum ist, muß man lieber aus eigener Anschauung, mündlicher Belehrung und wirklicher Handhabung kennen lernen, als aus bloser Beschreibung, die allemal Dunkelheiten zurücklassen wird, wenn man auch Zeichnungen beifügen würde. Darum wollen wir sogleich zu den ersten und unentbehrlichsten Verrichtungen des Feldmessers übergehen.

§. 3. Aufgabe. Eine gerade Linie auf dem Felde abzustecken.

Auflösung. In die beiden Endpunkte derselben stecke man lothrecht runde Stäbe ein, welche $\frac{3}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Zoll dick und 5 bis 10 Fuß lang sein mögen. Zwischen ihnen setze man noch so viele andere lothrecht ein, als nöthig sind, daß man z. B. beim Messen dieser Linie von der geraden Richtung nicht abweichen kann. Sämmtliche Stäbe müssen deßhalb einander decken. Damit dieß geschehe, läßt man erst durch einen Gehilfen den einzusenkenden Stab lothrecht herab halten, tritt von einem der Endstäbe etliche

Schritte zurück und untersucht, indem man bald zur rechten bald zur linken Seite des Endstabes nach dem einzusenkenden hinsieht, ob sich dieser in der geraden Linie befindet. So lange dieß der Fall nicht ist, winket man dem Gehilfen, daß er den Stab weiter rechts oder links rücke, bis dieser seine gehörige Stelle erhalten hat.

§. 4. Aufg. Eine gerade Linie auf dem Felde zu messen.

Aufl. Vor Allem muß die Linie richtig abgesteckt sein. Hierauf legt man den Maaßstab an und untersucht, wie oft die Einheit desselben in der zu messenden Linie enthalten ist. Bei dem Gebrauche der Meßkette ist nur darauf zu sehen, daß sie immer gehörig gespannt sei und die Verwickelungen ihrer Glieder beseitigt werden. Auch hüte man sich vor dem Verzählen. Bei dem Gebrauche der Meßstangen sorge man dafür, daß sie immer in gerader Richtung an einander gelegt werden, und daß richtig gezählt werde. Die Länge der gefundenen Linie wird durch den verjüngten Maaßstab auf das Papier aufgetragen.

§. 5. Aufg. Einen Winkel auf dem Felde aufzunehmen und zu messen.

Aufl. Dieß kann auf verschiedene Weise geschehen: 1) durch den Meßtisch. Man stecke durch eine feine Nadel auf dem mit Papier überzogenen Meßtische einen Punkt c ab, wohin die Spitze oder der Scheitel des gegebenen Winkels acb (Fig. 1. Tab. VI.) kommen soll; lege das Diopterlineal an den Punkt c so an, daß man durch die Absehen den Endpunkt a des einen Schenkels ca sehen kann und ziehe an der Schärfe des Lineals die Linie cd; hierauf drehe man das Lineal nach dem Endpunkt b des andern Schenkels cb und ziehe die Linie ce. Der hiedurch entstandene Winkel dce ist der verlangte Winkel.

2) Durch das Astrolabium oder jeden ihm ähnlichen Winkelmesser geschieht es so, daß man den Mittelpunkt

des Instrumentes genau über den Scheitelpunkt des zu messenden Winkels stellt. Hierauf richtet man die beiden Dioptern so, daß die unbeweglichen nach dem einen bezeichneten Punkte, die beweglichen nach dem andern sehen. Der zwischen den beiden Diopter liegende Bogen zeiget unmittelbar die Größe des zu messenden Winkels in Graden und Minuten. Denselben trägt man auf das Papier entweder durch Hilfe des Transporteurs oder genauer durch Hilfe der Sinustafeln. Es genügt aber hier schon ein Halbmesser von 1000 Theilen. Deßhalb läßt man die vier letzten Ziffern in den gewöhnlichen Sinustafeln weg. Wenn z. B. ein Winkel von 42° 18′ auf das Papier verzeichnet werden soll, so ziehe man zuerst eine Linie AB (Fig. 2.) und nehme darauf einen Halbmesser AC = 1000. Mit demselben zeichne man einen Bogen CG von unbestimmter Länge. Weil nun die halbe Sehne eines Winkels der Sinus des halben Winkels ist, so verdoppele man die zum Sinus des halben zu verzeichnenden Winkels (21° 9′) gehörige Zahl 360,8 und trage ihre Länge = 2 × 360,8 = 721 als Sehne CD in den Kreisbogen. Zieht man jetzt noch den andern Schenkel AD, so ist CAD der verlangte Winkel, welcher auf 4 bis 5 Minuten genau ist.

§. 6. Aufg. Einen gegebenen Winkel auf das Feld überzutragen oder abzustecken.

Aufl. Wenn ein Winkel auf dem Felde an einen andern Ort übergetragen werden soll, so kann es mit der Meßkette gerade so geschehen, wie man auf dem Papier mit dem Zirkel Winkel überträgt, nämlich in dem gegebenen Winkel zieht man mit der Kette zwischen den Schenkeln eine dritte Linie, um ein Dreieck zu bekommen, und trägt dann die drei Seiten desselben über.

Mit Hilfe des Meßtisches geschieht es so, daß man zuerst den gegebenen Winkel aufnimmt, alsdann den Meßtisch über den Scheitelpunkt des abzusteckenden Winkels

stellt, das Diopterlineal an den einen und andern Schenkel anlegt und die Punkte, wie a und b (Fig. 1.), nach den verlängerten Absehlinien abstecken läßt. Die Lage des einen Schenkels kann beliebig oder schon bestimmt sein. Im letztern Falle hat man nur noch die Lage des andern Schenkels zu bestimmen.

Mit einem Winkelmesser verfährt man so, daß man das Instrument auf den Scheitelpunkt des abzusteckenden Winkels setzt, die beweglichen Absehen oder das bewegliche Fernrohr in die Richtung des einen Schenkels stellt, in gehöriger Entfernung einen Stab so einstecken läßt, daß er von dem Faden des Objektivdiopters gedeckt wird. Alsdann dreht man die Absehen oder das Fernrohr in die Richtung des andern Schenkels und läßt wiederum einen Stab gehörig einstecken. Hiedurch ist der verlangte Winkel auf dem Felde abgesteckt.

§. 7. Aufg. Die Entfernung zweier Orte zu messen, welche in gerader Richtung unzugänglich sind, zu welchen man aber aus einem gewissen Standpunkte kommen kann. (Fig. 3.)

Aufl. Es gibt verschiedene Weisen, die Aufgabe zu lösen. I. Der Ort, aus welchem A und B zugänglich und sichtbar sind, sei C. Man bezeichne diesen durch einen Stab, messe die Linie AC und trage sie in gleicher Größe nach E zurück, so daß ACE eine gerade Linie bilde. Eben so verfahre man mit BC. Nun messe man DE. Diese gleicht der Entfernung AB.

Gestattet der Raum nicht, AC und BC ganz zurückzutragen, so kann man auch nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ derselben nehmen. Es sei z. B. $Ce = \frac{1}{2} AC$ und $Cd = \frac{1}{2} BC$; alsdann ist $de = \frac{1}{2} AB$.

II. Man setze den Meßtisch in C (Fig. 4.), verzeichne den Winkel ACB, messe die Linie CA und trage sie nach einem verjüngten Maaßstabe auf den Schenkel Ca und

eben so CB auf Cb. Endlich ziehe man die Linie ab und messe sie. So viel nun ab nach dem verjüngten Maaße beträgt; eben so viel mißt AB in dem Maaße, nach welchem AC und BC gemessen worden sind.

III. Man messe die Seiten AC und BC und mit einem Winkelmesser den Winkel ACB. Aus diesen drei Stücken des Dreiecks ABC berechne man trigonometrisch die Seite AB.

§. 8. Aufg. Die Entfernung zweier Orte oder Punkte zu finden, wenn man aus einem Standpunkte zwar zu dem einen, aber nicht zu dem andern kommen kann.

Aufl. I. Es sei die Weite AB (Fig. 5.) zu messen. Man wähle einen beliebigen Standpunkt C; trage BC zurück nach CE, so daß CE = BC wird; in E setze man den Winkel B an und verlängere den Schenkel EF so lange, bis FCA in einer geraden Linie liegen. Es wird EF = AB sein.

Will man die Breite eines Flusses messen, so verfährt man wie so eben gezeigt worden ist. Man zieht nur noch die Länge DB von der gefundenen Länge EF = AB ab und man erhält AD als die Breite des Flusses.

II. Es sei AB (Fig. 6.) zu messen. Man messe die Linie CA und trage sie vom Scheitel des Winkels C auf dem Meßtische Ca nach dem verjüngten Maaßstabe auf. Von C ziehe man in der Richtung CB die Linie Cd von unbestimmter Länge. Dann bringe man den Meßtisch nach A und stelle ihn so, daß der Punkt a genau über den Punkt zu stehen komme, wohin man visirt hatte, und daß die Linie aC gerade nach C hinziele, und ziehe in der Richtung von a nach B eine Linie, welche die Linie Cd in b schneidet. Diese ab ist nach dem verjüngten Maaßstabe so groß als die Linie AB in dem natürlichen Maaße.

III. Trigonometrisch wird die Sache bewerkstelliget, wenn man in der 5. Figur die beiden Winkel ABC und

BCA nebst der Seite BC mißt und daraus die Weite AB berechnet. In der 6. Figur werden die Winkel A und C nebst der Seite AC gemessen, und die Entfernung AB durch Rechnung gefunden.

§. 9. Aufg. Die Entfernung zweier unzugänglicher Orte zu finden, zu welchen man aus einem Standpunkte C nicht kommen kann.

Aufl. I. Außer dem Standpunkte C (Fig. 7.) wähle man noch einen andern, aus welchem man nach C kommen kann, und bestimme (nach §. 8.) die Entfernung AC; und eben so verfahre man, um CB zu bekommen. Diese Weiten AC und BC trage man zurück, und man findet DE = AB.

II. Man nehme eine Standlinie CD (Fig. 8.) an, die man messen kann. Von dem Punkte c des Meßtisches, der über C stehet, ziehe man in der Richtung nach D eine Linie cd so groß nach dem verjüngten Maaßstabe, als CD nach dem natürlichen ist; in der Richtung nach A und B ziehe man cf und cg von unbestimmter Länge. Jetzt trage man den Meßtisch nach D und stelle d genau über D und dc längst DC; ziehe hierauf von d nach A und B Linien, welche die vorigen in a und b schneiden. Dann ist ab die gesuchte Weite nach dem verjüngten Maaße.

III. Man messe die Winkel ACD und ADC, so wie die Seite CD, und suche daraus trigonometrisch die Seite DA. Eben so messe man die Winkel BDC und BCD und berechne aus ihnen und der Seite CD die Seite DB. Von dem Winkel BDC ziehe man ADC ab, so erhält man den Winkel ADB. Jetzt hat man in dem Dreiecke ADB den Winkel ADB, die Seiten AD und BD; woraus man trigonometrisch die dritte Seite AB als die gesuchte Entfernung berechnen kann.

§. 10. Aufg. Die Höhe eines Gegenstandes zu messen, zu deren untern Ende man kommen kann. (Fig. 9.)

Aufl. I. In einiger Entfernung von der zu suchenden Höhe HF stecke man die Stange CE lothrecht in die Erde, und noch etwas weiter rückwärts schlage man einen kleinen Pfahl AB so ein, daß die Enden A und C mit F in einer geraden Linie gesehen werden.

An der Stange CE bezeichne man den Punkt D so, daß A und D in einer geraden wagrechten Linie liegen.

Nun messe man die Weite BE = AD; die Weite BH = AG und die Länge DC.

Jetzt kann man die Höhe GF durch folgenden Ansatz berechnen

$$AD : DC = AG : GF$$

$$\text{und } GF = \frac{DC \times AG}{AD}$$

Zu dieser gefundenen Höhe GF muß noch die Länge GH = AB addirt werden, um die ganze Höhe HF zu erhalten.

II. Mit dem Meßtisch verfährt man also: man stellt ihn in einiger Entfernung z. B. in A auf, aber so, daß seine Fläche lothrecht steht; mißt die Weite BH = AG und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe = ab auf und errichtet am Ende der ab ein Perpendikel bc; aus A oder a visirt man nach dem Punkte F und zieht eine Linie ac so weit, bis sie das in b errichtete Perpendikel in c schneidet: dann gibt bc im verjüngten Maaße die Höhe GH an, zu welcher noch AB = GH zu addiren ist, um die ganze Höhe HF zu bekommen.

III. Mit einem Winkelmesser bestimme man die Größe des Winkels FAG und messe die Linie BH = AG; so hat man in dem rechtwinkligen Dreiecke AGF die Seite AG und den Winkel FAG. Aus diesen Stücken berechne man trigonometrisch die Seite GF und addire dazu die Höhe des Instrumentes AB = GH; so hat man gleichfalls die ganze Höhe HF.

§. 11. Aufg. Die Höhe eines Gegenstandes (Berges, Thurmes, einer Pyramide ꝛc.) zu messen, zu deren untern Ende man nicht kommen kann. (Fig. 10.)

Aufl. I. Mit dem Meßtisch. Man wähle zwei Standpunkte A und B so, daß man eine horizontale oder wagrechte Standlinie AB messen kann und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe = ab auf. Man visire von a nach D und ziehe aus a in der Richtung aD eine Linie von unbestimmter Länge. Dann stelle man den Meßtisch in B so, daß b gerade über B zu stehen komme; visire aus b nach D und ziehe aus b eine Linie so lange, bis sie die vorige aus a nach D gezogene in d durchschneidet. Von dem Punkte d fälle man auf die verlängerte ab ein Perpendikel: so ist nach dem verjüngten Maaßstabe dieses Perpendikel de = DE nach dem natürlichen Maaße. Hiezu addire man noch die Höhe des Meßtisches aA = bB = EC und man hat die verlangte Höhe DC.

II. Trigonometrisch. Man messe eine wagrechte Standlinie, wie AB = ab; bestimme mit einem Winkelmesser die beiden Winkel DaE und DbE. Aus diesen drei Stücken berechne man die Seite bD dadurch, daß man zuvor den Winkel DaE von dem Winkel DbE abzieht, wodurch man die Größe des Winkels aDb erhält. Aus der Seite bD und dem Winkel DbE des rechtwinkligen Dreieckes DEb findet man durch trigonometrische Rechnung die Seite DE, zu welcher man noch die Höhe des Instrumentes aA = bB = EC zu addiren hat, um die ganze Höhe DC zu erhalten.

Man kann auch den Winkel Dba unmittelbar mit dem Instrumente messen; dann erhält man durch eine leichte Rechnung die Winkel DbE und bDa. Das übrige Verfahren ist wie vorhin.

§. 12. Eine Figur in Grund legen heißt eine Figur auf dem Papier entwerfen, welche einer Figur auf

dem Felde ähnlich ist. Man sagt auch: einen Grundriß von einem Felde, Walde, einer Wiese u. s. w. machen. Es gibt verschiedene Weisen, dieß auszuführen; und es hängt von äußerlichen Umständen und Oertlichkeiten, welche man in jedem besondern Falle anwenden kann, ab. Wir können hier natürlich nur die allgemeinsten kenntlich machen.

§. 13. Aufg. Den Grundriß von einem Felde zu machen, in welchem man ungehindert gehen und nach Belieben messen kann.

Aufl. I. Man theile durch Diagonalen das ganze Feld in lauter Dreiecke AED, ADC, ACB (Tab. II. Fig. 43.); messe die drei Seiten eines jeden Dreiecks, wie AE, ED, DA u. s. w. und mache nach dem verjüngten Maaßstabe ae = AE, ed = ED, da = DA, ac = AC u. s. w., so daß auf dem Papiere ähnliche Dreiecke entstehen, wie aed ∾ AED, dca ∾ DCA und abc ∾ ABC. Auf diese Weise wird auf dem Papiere die Figur abcdea ähnlich der Figur auf dem Felde ABCDEA. Die Berechnung ihres Flächeninhaltes kann ohnehin keinen Anstand haben. Bei dieser Auflösungsweise braucht man kein anderes Werkzeug als Stäbe und Meßkette (Meßschnur, Meßstangen).

II. Man stelle den Meßtisch (Fig. 11. Tab. VI.) an einen beliebigen Ort in dem Felde und nehme auf dem Papier einen bestimmten Punkt g, von welchem aus vermittelst des Diopterlineals gerade Linien ga, gb, gc, gd, ge, gf, welche nach den Winkeln des Feldes A, B, C, D, E, F hinzielen, gezogen werden. Alsdann messe man auf dem Felde die Linien gA, gB, gC, gD, gE, gF und mache nach dem verjüngten Maaßstabe ga = gA, gb = gB, gc = gC u. s. w. Endlich ziehe man die geraden Linien ab, bc, cd, de, ef, fa und die Figur abcdefa ist der im Felde ABCDEF ähnlich oder stellt diese im verjüngten Maaße dar.

III. Aus einem nach Belieben gewählten Standorte g messe man mit einem Winkelmesser die Winkel AgB, BgC, CgD, DgE, EgF, FgA und messe die Linien gA, gB, gC, gD, gE, gF. Nach einem verjüngten Maaßstabe trage man sie unter den gleichen gemessenen Winkeln und in gleicher Ordnung auf das Papier: so erhält man gleichfalls einen Grundriß von dem Felde. (Fig. 12.)

§. 14. Aufg. Ein Stück Land (z. B. einen Wald u. s. w.) in Grund zu legen, wenn man in demselben nicht herumgehen und messen kann. (Fig. 13.)

Aufl. I. Man nehme mit dem Meßtische nach obiger Vorschrift einen Winkel nach dem andern auf, messe die Seiten des Stück Landes und trage sie sogleich nach dem verjüngten Maaße auf das Papier. Es ist nur die größte Sorge zu tragen, daß der Meßtisch immer ganz genau gestellt werde, so daß die Scheitel der verzeichneten Winkel über die Scheitel der gemessenen Winkel zu stehen kommen; eben so, daß die auf dem Papier gezeichneten Linien genau über den gemessenen Linien stehen. Wenn sich die Figur am Ende nicht genau schließt, so sind Fehler im Messen oder im Auftragen der Winkel und Linien vorgefallen. Man muß in einem solchen Falle eine wiederholte Messung vornehmen. Man erhält auf diese Weise die verjüngte Figur unmittelbar auf dem Papier.

II. Mit einem Winkelmesser suche man die Größe der sämmtlichen Winkel A, B, C, D, E und messe die Seiten AB, BC, CD, DE, EA. Sämmtliche gemessene Winkel und Linien bringe man zu Papier, und zwar letztere nach einem verjüngten Maaße, in der Ordnung, wie sie in der Wirklichkeit auf einander folgen. Um nicht irre zu werden, ist es gut, sich schon zum voraus einen ohngefähren Riß (Brouillon) des Stück Landes aus freier

Hand zu machen und sich sogleich nach dem Messen der einzelnen Winkel und Linien ihre Größe an dem gehörigen Orte zu bemerken und einzutragen. Je sorgfältiger man in Allem sein wird, desto genauer wird endlich der Grundriß des Stück Landes ausfallen.

§. 15. Aufg. Eine ganze Flur aufzunehmen und in Grund zu legen.

Aufl. I. Man suche sich nach Belieben eine Standlinie AB (Fig. 14.) aus, von deren beiden Endpunkten A und B aus man nach den Orten, welche man in den Grundriß bringen will, sehen und messen kann. In das eine Ende B setze man einen Stab senkrecht, in das andere A den Meßtisch, messe die Standlinie AB und bringe sie verjüngt auf das Papier. Hierauf nehme man mit Hilfe des Diopterlineals die sämmtlichen Winkel auf, welche die Linien AC, AD, AF, AG, AH mit der Standlinie AB machen, und zeichne sie hin, wie es bisher geschehen ist. Jetzt nehme man den Meßtisch von A weg, stecke dafür einen Stab in A senkrecht ein, und stelle den Meßtisch in B so, daß er genau in der Richtung BA zu stehen kommt. Man nehme auch hier bei B die Winkel auf, welche die Linien BC, BD, BE, BG, BH mit der Standlinie BA machen und bringe sie sogleich auf den Meßtisch. Auf diese Weise werden sich die Linien auf dem Meßtische so durchschneiden, wie auf dem Felde, z. B. AC und BC in C, AD und BD in D u. s. w. Dadurch sind die Hauptpunkte an ihre gehörige Stelle gebracht und ihre Entfernungen können auf dem Grundrisse nach demselben Maaßstabe gemessen werden, nach welchem AB aufgetragen wurde.

II. Man wähle, wie vorhin, eine Standlinie AB, setze in das eine Ende B einen Stab, in das andere A

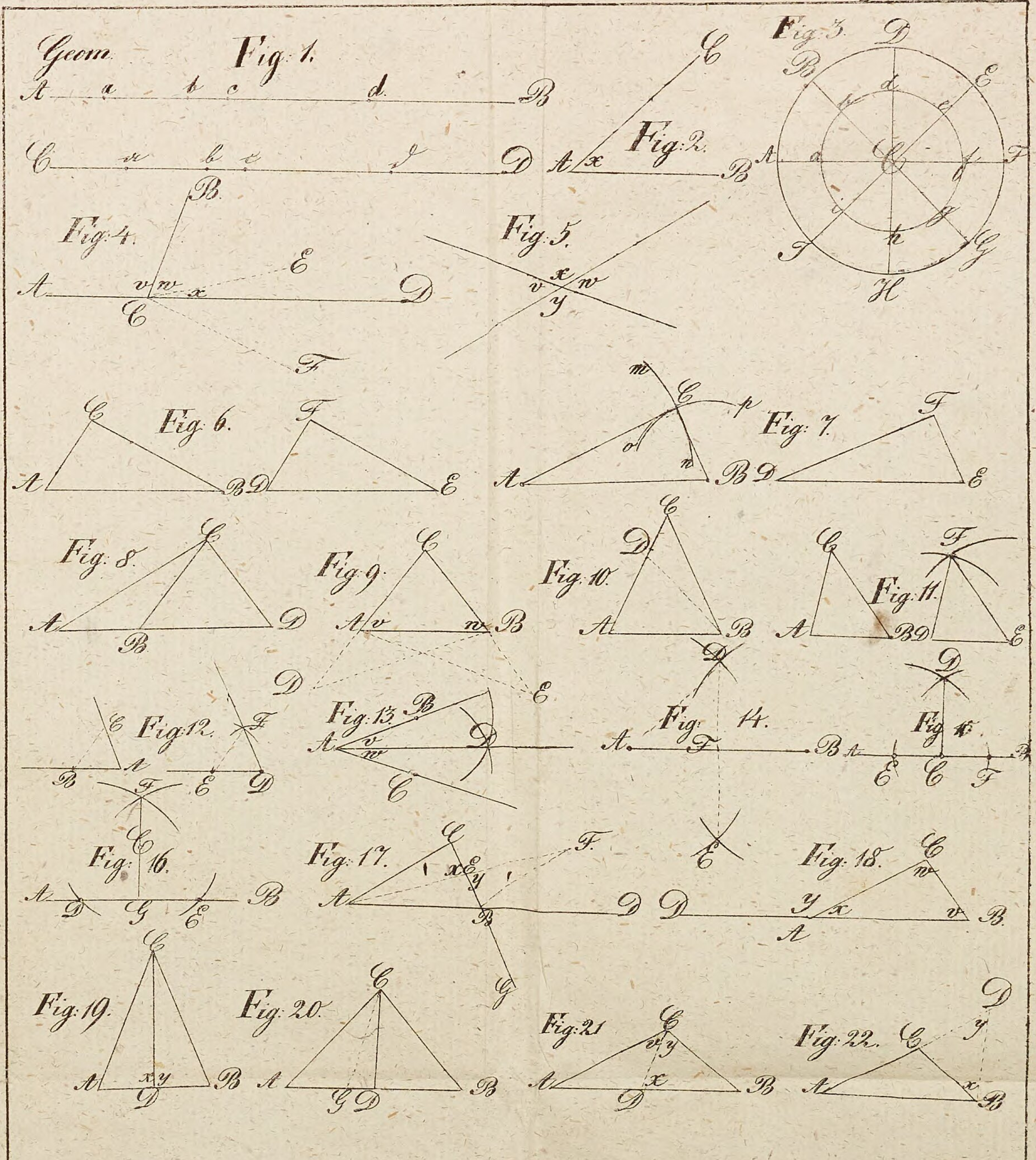
das Astrolabium oder einen andern Winkelmesser und richte das Instrument nach der Linie AB. Diese messe man und schreibe sich ihre Größe auf. Nun bestimme man mit dem Winkelmesser, wie vorhin, die Winkel CAB, DAB, EAB, HAB, GAB, FAB und schreibe sich ihre Größe auf. Nachdem man die Länge der Standlinie AB gemessen und sich ihre Größe bemerkt hat, bringe man das Instrument an das andere Ende B der Standlinie und richte es nach BA, in A aber stecke man einen senkrechten Stab ein. Jetzt messe man auch die Winkel CBA, DBA, EBA, FBA, GBA, HBA und bemerke sich ihre Größe. Es ist auch hier gut, sich vorher einen ohngefähren Abriß der Flur (Brouillon) zu entwerfen und auf der Stelle die Größe der gemessenen Gegenstände in denselben einzutragen. Man ist dann vor Verwechselung und Verwirrung der Sachen gesichert. Zu Hause wird dann aus dem Brouillon zuerst die Standlinie AB nach dem verjüngten Maaßstabe gezeichnet und hierauf werden die gemessenen Winkel bei A und B gehörig angesetzt. Auf diese Weise erhält man gleichfalls, wie vorhin, den Grundriß der Figur. Die sich durchschneidenden Linien geben in ihren Durchschnittspunkten die Stellen an, wohin die Gegenstände gehören, nach welchen man vorhin visirte und welche man in den Grundriß aufnehmen wollte.

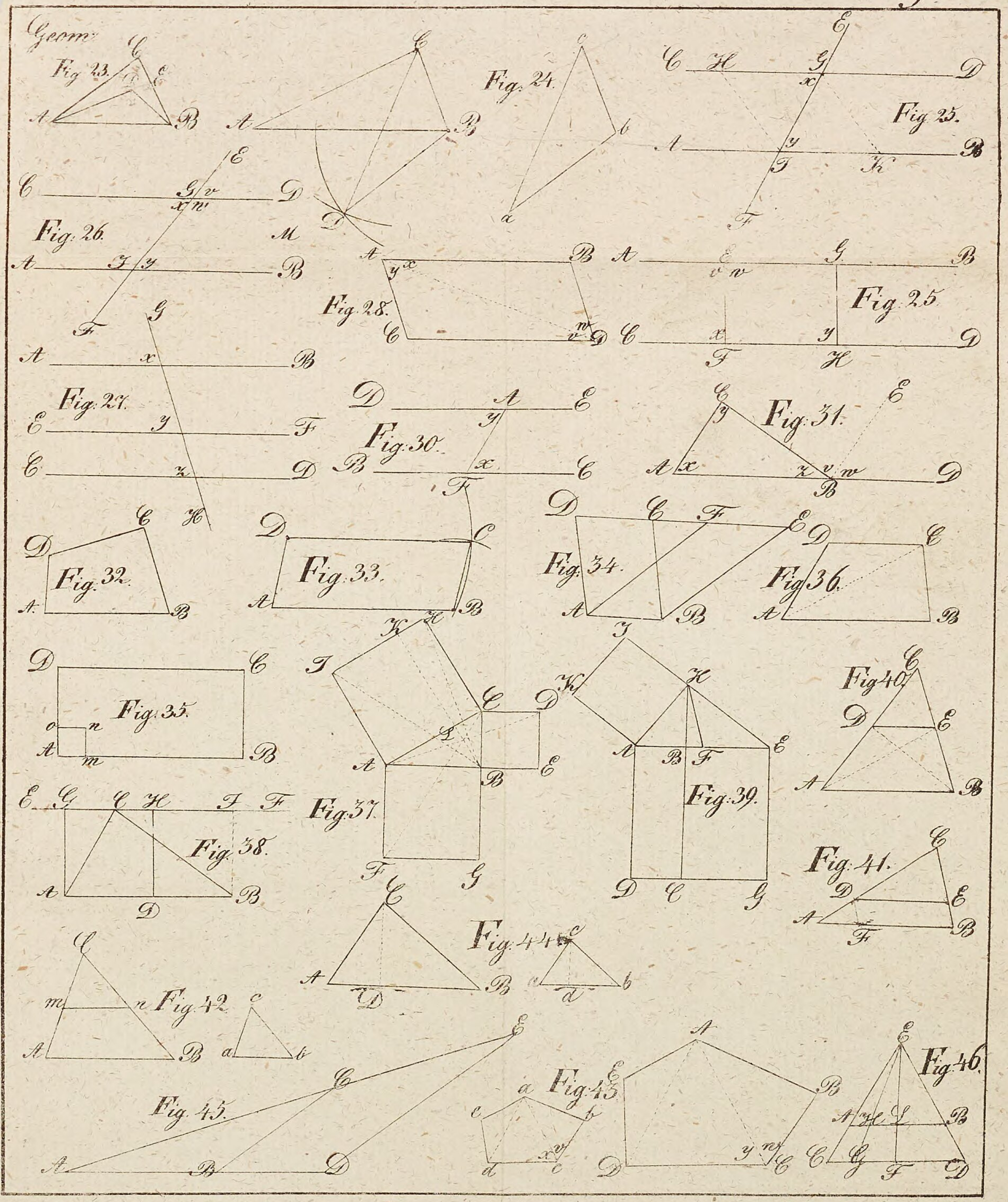
§. 16. Das Bisherige mag für den ersten Anlauf hinreichen. Der Anfänger muß ohnehin erst dahin arbeiten, daß er die einfachen Arbeiten mit Leichtigkeit und Sicherheit ausführe. Wenn er hierin geübt und fest sein wird, dann erst mag er zu zusammengesetzteren und schwierigen Verrichtungen übergehen. Hat er sich die Lehren der reinen Mathematik wohl zu eigen gemacht, so wird er sich bei vorfallenden Schwierigkeiten bald selbst zu helfen wissen, während der blos handwerksmäßige Feldmesser nicht

weiter zu gehen vermag, als wohin er handwerksmäßig geführt worden ist. Wer übrigens ein vollkommener Feldmesser werden will, wird ohnehin die besondern, in die Feldmeßkunst einschlagenden Bücher fleißig studiren. Das vollständigste und beste Werk hierüber ist bis jetzt unstreitig J. T. Mayer's gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie in fünf Theilen. Göttingen bei Vandenhoek und Ruprecht.

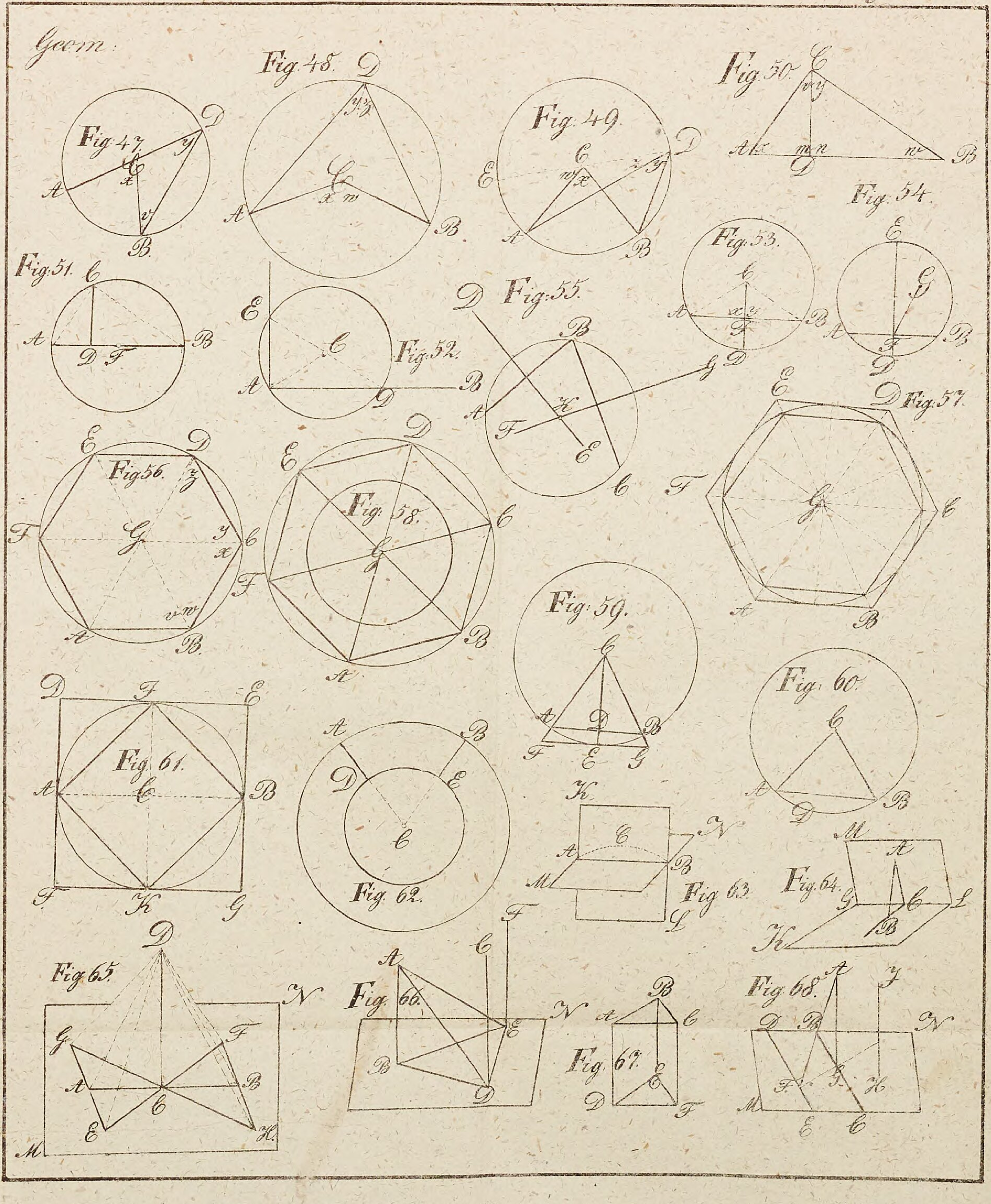
Tabelle
über Fuße und Ellen.

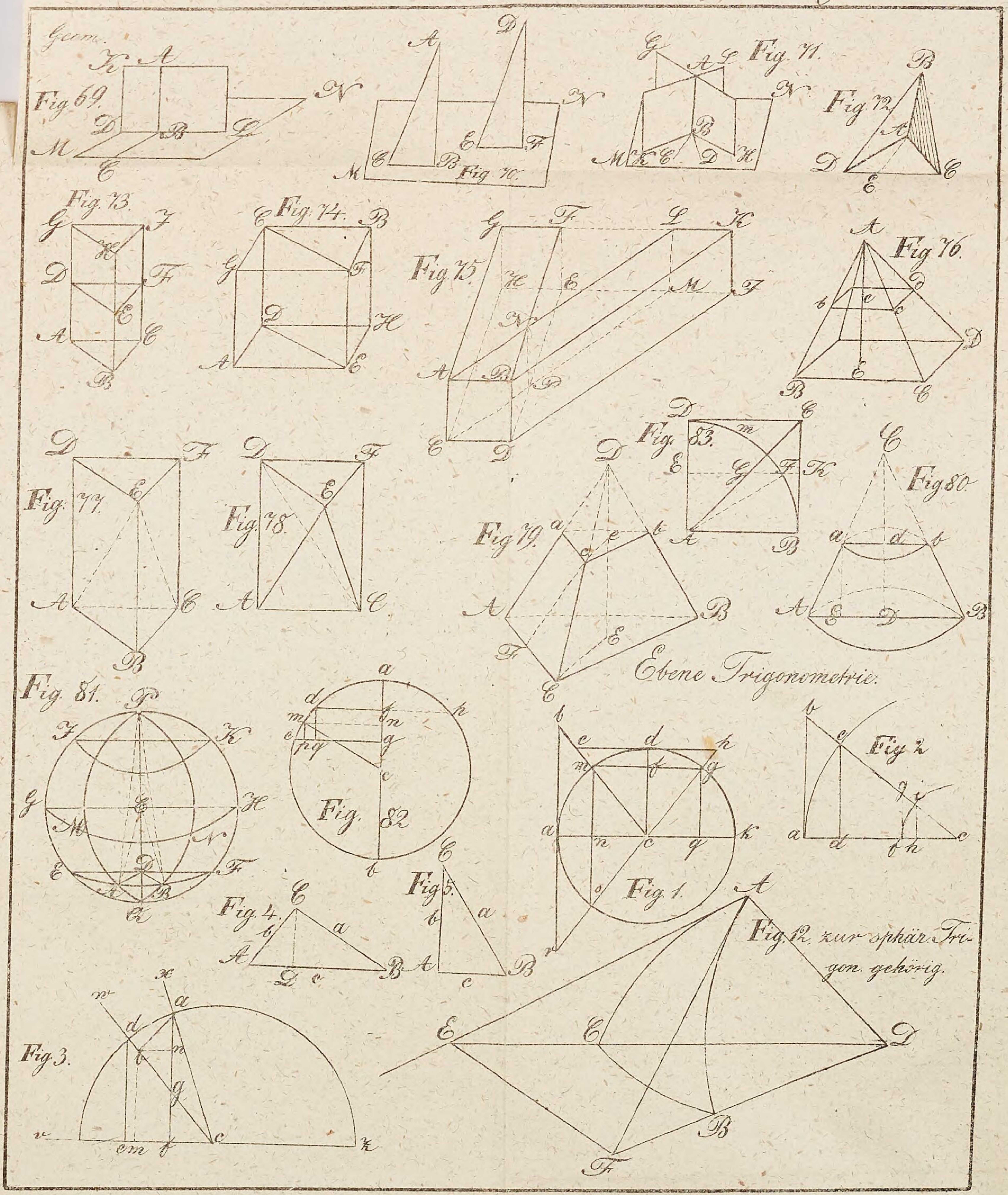
Länder und Städte.	Fuße in pariser oder französ. Linien.	Ellen in pariser Linien.
Altona. . .	127	254
Amsterdam. .	125,5	306
Ansbach. . .	132,92	276,78
Augsburg. .	131,3	gr. 270,2 kl. 262,6
Baireuth. .	135,16	266,2
Baiern. . .	129,38	369,27
Berlin. . .	139,13	295,65
Braunschweig.	126,5	253
Dänemark. .	139	278,3
Danzig. . .	127,2	254,4
England. . .	134,7	506,9
Frankfurt am Main. . . .	125,3	242,6
Frankreich. .	144	526,83
Hamburg. .	127	254
Hannover. .	129,5	258,8
Holland. . .	125,5	306
Leipzig. . .	125,1	250,6
Lübeck. . . .	129	255,8
Neapel. . .	116,5	936,6
Nürnberg. .	134,8	291,08
Oestreich. . .	140,13	345,42
Regensburg.	139	359,083
Rheinländischer. . . .	139,13	
Rom. . . .	130,6	887,3
Rußland. . .	135	315,4
Sachsen. . .	125,3	250,6
Schlesien. .	127,6	255,3
Schweden. .	131,6	263,2
Spanien. . .	125,3	370,16
Würtemberg.	127	272,28

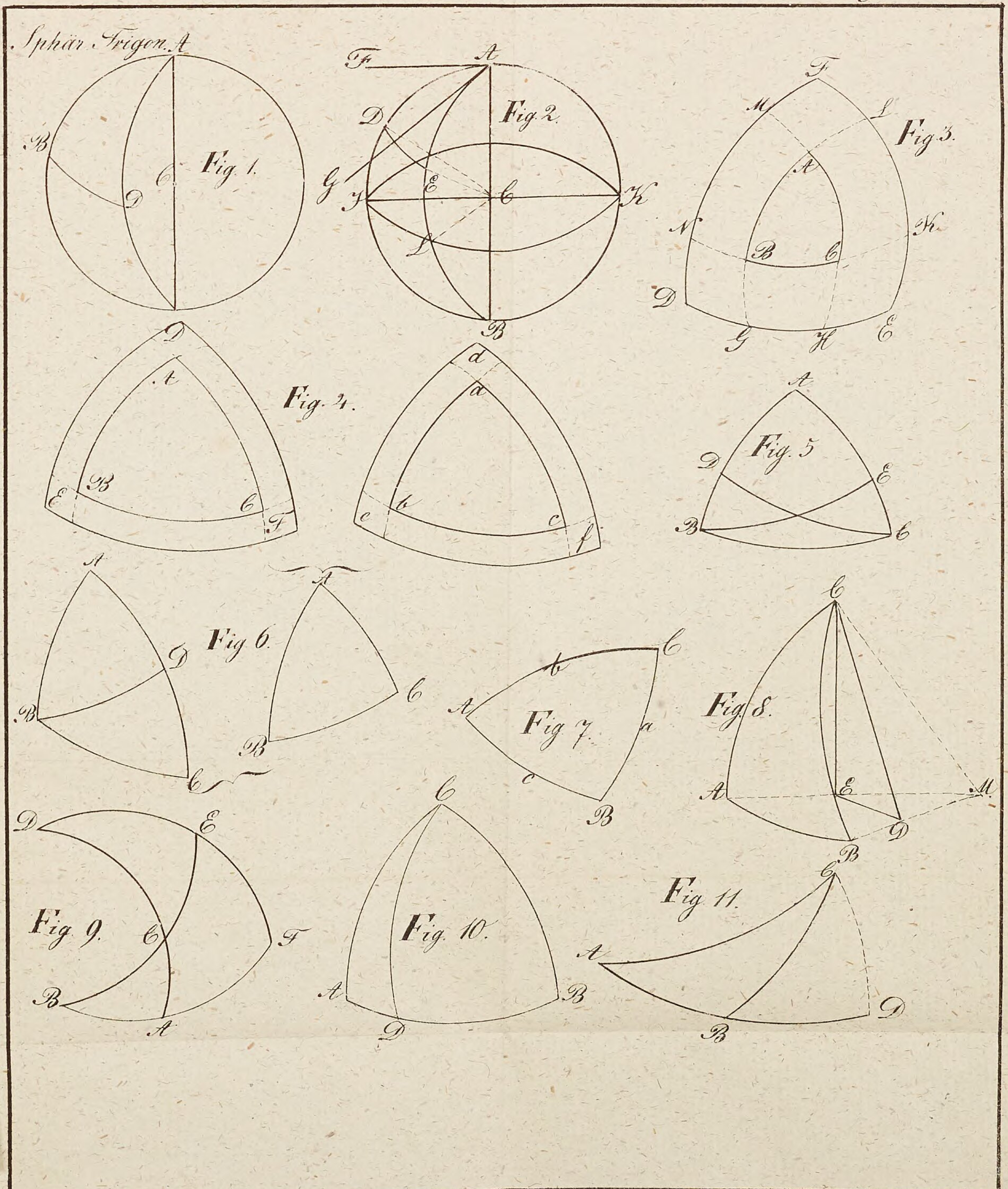

Geom.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.



Geom.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.

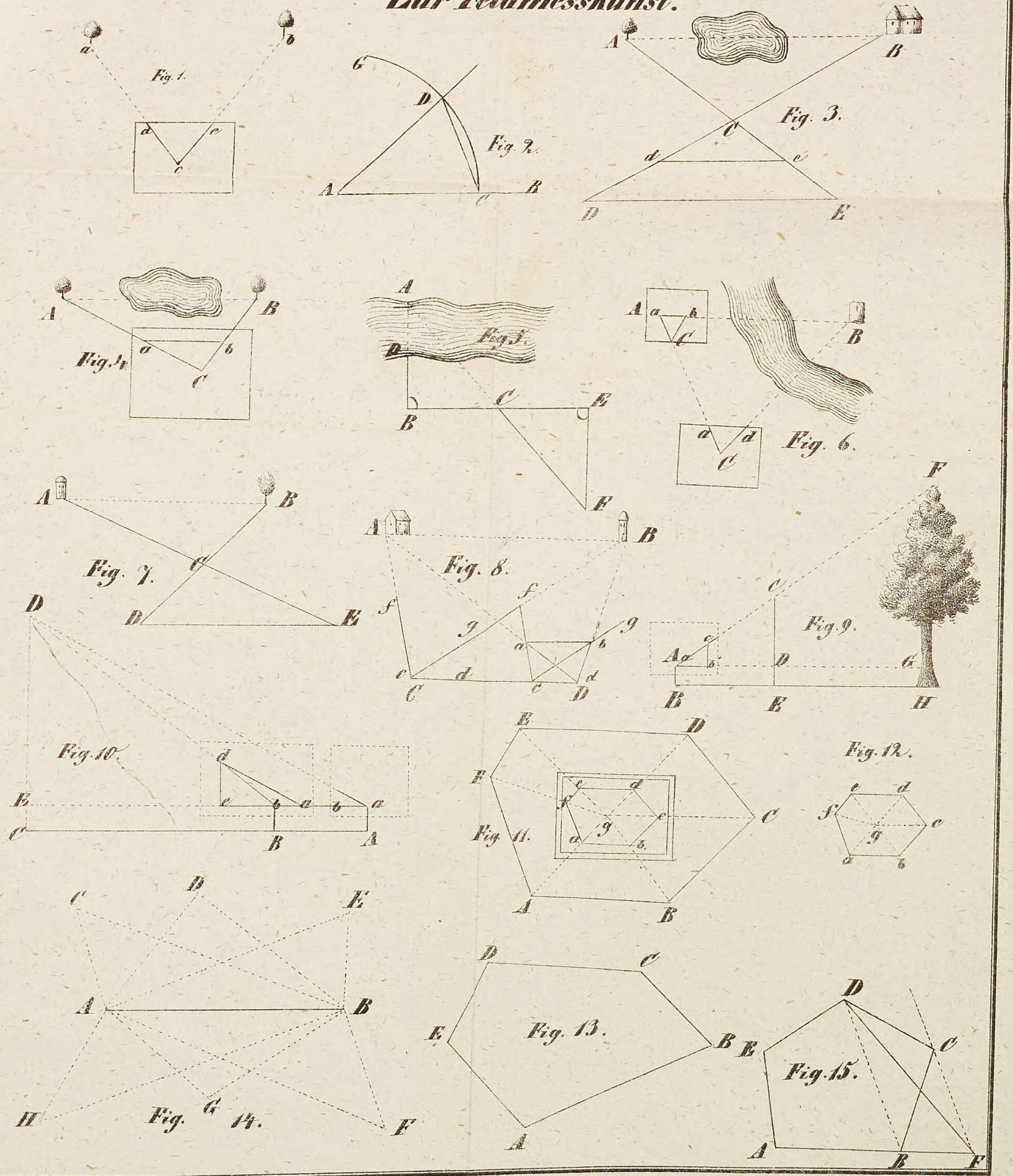

Geom:
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.

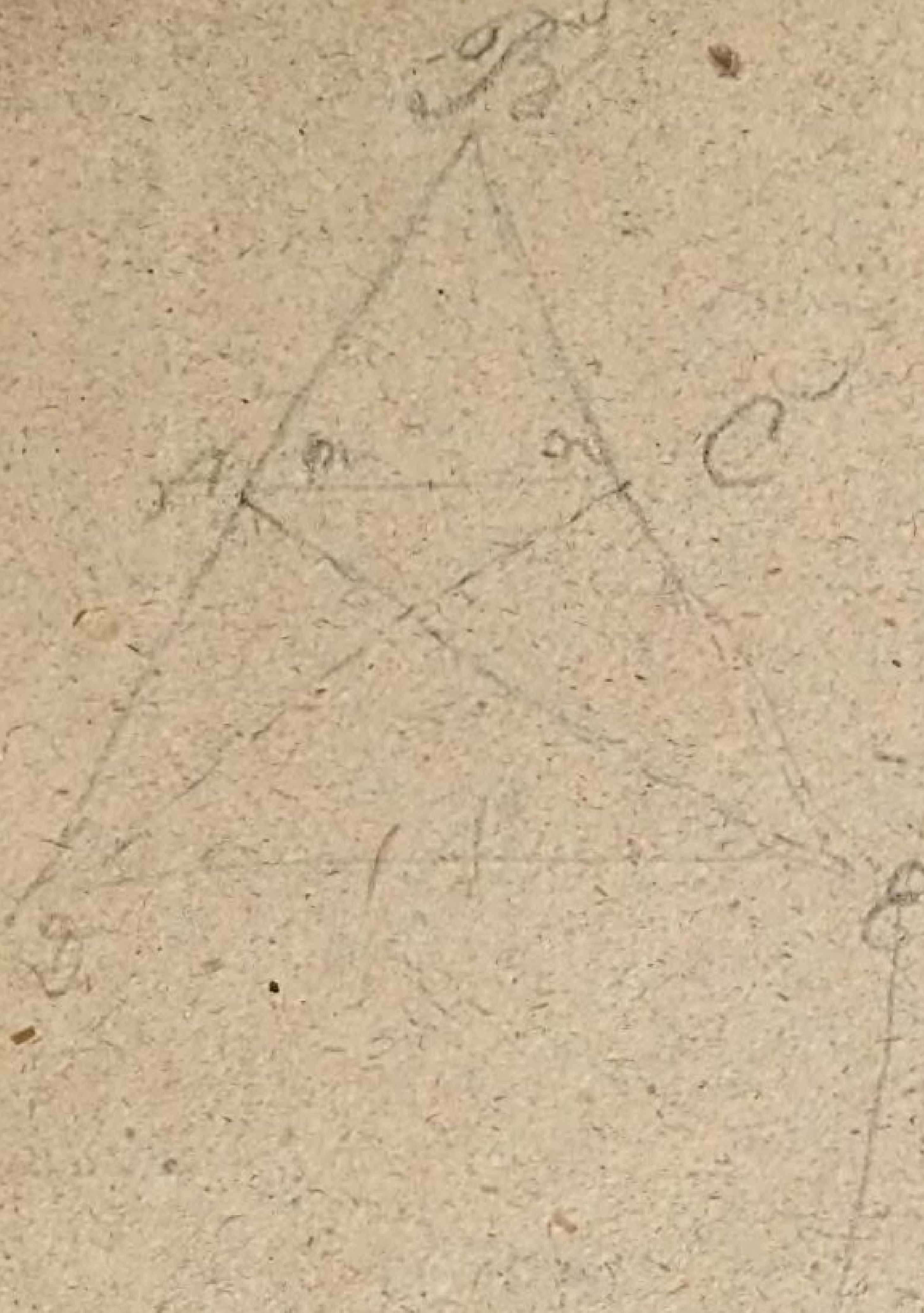

Geom.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Ebene Trigonometrie.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 12. zur sphär. Trigon. gehörig.


Sphär. Trigon.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

Tab. VI.

Zur Feldmesskunst.





m = n

AB = BC - AC

AB = BC

AD = CE

BD = BE

AB = BC

∠B = ∠B

Δ BAE ≅ Δ BCD

∠BCD = ∠BAE

AD = CE

CD = AE

∠E = ∠D

ACD ≅ ACE

∠ACE = ∠CAE

BD = BAE

CD = AE

n = n

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Neubig, Andreas

Grundriß der reinen Mathematik mit einer kurzen Anweisung zum Feldmessen fü
r Gymnasien, polytechnische und Gewerbe-Schulen

Bayreuth 1835

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.43
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739731-2